



**Universität-Gesamthochschule Paderborn**  
Fachbereich 17 · Mathematik - Informatik  
Praktische Informatik  
Univ.-Prof. Dr. Hans Kleine Büning

**Modellbildung am Beispiel von Starrkörpersystemen –  
Systematische Darstellung und Untersuchung von  
Software-Unterstützung**

Studienarbeit

von

Stefan Goldschmidt

Betreuer: Dr. Benno Stein

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe Dritter angefertigt, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Paderborn, den 4. November 1996

(Stefan Goldschmidt)

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Modellbildung</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1      | Motivation zur Modellbildung . . . . .                         | 3         |
| 2.2      | Aufbau eines Systems . . . . .                                 | 4         |
| 2.3      | Bildung eines mentalen Modells . . . . .                       | 6         |
| 2.4      | Klassifikation der Modelle . . . . .                           | 7         |
| 2.5      | Bildung eines rechnerinternen Modells . . . . .                | 9         |
| 2.6      | Parameteridentifikation und Verifikation des Modells . . . . . | 10        |
| 2.7      | Klassifikation der Systeme . . . . .                           | 11        |
| <b>3</b> | <b>Modellbildung von Starrkörpersystemen</b>                   | <b>13</b> |
| 3.1      | Elemente und Beziehungen eines Starrkörpersystems . . . . .    | 13        |
| 3.2      | Zwangsbedingungen . . . . .                                    | 16        |
| 3.3      | Newton-Euler-Gleichungen . . . . .                             | 18        |
| 3.4      | Prinzip von D'Alembert . . . . .                               | 21        |
| 3.5      | Prinzip von Jourdain . . . . .                                 | 27        |
| 3.6      | Prinzip von Gauß . . . . .                                     | 32        |
| <b>4</b> | <b>Softwareunterstützte Modellbildung</b>                      | <b>34</b> |
| 4.1      | AUTOLEV . . . . .  | 34        |
| 4.2      | IMECH Mechanik-Bibliothek . . . . .                            | 38        |
| 4.3      | SIMULINK . . . . .   | 44        |
| <b>5</b> | <b>Resümee und Ausblick</b>                                    | <b>48</b> |

|   |           |
|---|-----------|
| <i>INHALTSVERZEICHNIS</i>                                     | VI        |
| <b>A Fallbeispiel Schubkurbeltrieb</b>                        | <b>50</b> |
| A.1 Kinematik . . . . .                                       | 50        |
| A.2 Dynamik . . . . .   | 57        |
| A.3 Modellbildung mit AUTOLEV . . . . .                       | 63        |
| A.4 Modellbildung mit der IMECH Mechanik-Bibliothek . . . . . | 66        |
| A.5 Modellbildung mit SIMULINK . . . . .                      | 68        |
| <b>B Fallbeispiel Kufe</b>                                    | <b>73</b> |
| B.1 Kinematik . . . . .                                       | 73        |
| B.2 Dynamik . . . . .   | 76        |
| B.3 Modellbildung mit AUTOLEV . . . . .                       | 78        |
| B.4 Modellbildung mit der IMECH Mechanik-Bibliothek . . . . . | 81        |
| B.5 Modellbildung mit SIMULINK . . . . .                      | 82        |

## Abbildungsverzeichnis

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Experiment am System . . . . .  | 3  |
| 2  | Simulation am Modell . . . . .  | 4  |
| 3  | System als Block mit Ein- und Ausgangsgrößen . . . . .                      | 5  |
| 4  | Struktur eines neuen Systems . . . . .                                      | 5  |
| 5  | Klassifikation der Modelle . . . . .  | 8  |
| 6  | Bildung eines rechnerinternen Modells . . . . .                             | 10 |
| 7  | Grafisches Modell des Schubkurbeltriebes . . . . .                          | 15 |
| 8  | Grafisches Modell der Kufe . . . . .  | 15 |
| 9  | Freischnitt des Schubkurbeltriebes . . . . .                                | 19 |
| 10 | Freischnitt der Kufe . . . . .  | 20 |
| 11 | Übertragungsblöcke und Signalleitungen . . . . .                            | 39 |
| 12 | Blockschaltbild des Lenkers . . . . .                                       | 70 |
| 13 | Blockschaltbild des Pleuels . . . . .                                       | 71 |
| 14 | Blockschaltbild des Kolbens . . . . .                                       | 71 |
| 15 | Blockschaltbild des mathematischen Modells des Schubkurbeltriebes . . . . . | 71 |
| 16 | Blockschaltbild der Kufe . . . . .  | 84 |
| 17 | Blockschaltbild des mathematischen Modells der Kufe . . . . .               | 84 |

## Tabellenverzeichnis

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Ein- und Ausgangsgrößen der Blöcke des Schubkurbeltriebes. . . . . | 72 |
| 2 | Ein- und Ausgangsgrößen der Blöcke der Kufe. . . . .               | 85 |

## 1 Einführung

Die kürzer werdenden Produktlebenszyklen erfordern eine schnellere Entwicklung von verbesserten und neuen Produkten. Weiterhin ist eine Reduzierung der Entwicklungskosten notwendig, um die Konkurrenzfähigkeit am Markt zu sichern. Zudem sind immer höhere Anforderungen der Kunden an die Produkte zu befriedigen. Da die Produktentwicklung die genannten Punkte zu einem erheblichen Teil beeinflusst, sind besonders ihre Systematiken und Methoden zu verbessern und zu erneuern.

In letzter Zeit hat man unter anderem die Systematiken und Methoden der Produktentwicklung durch den Einsatz der Computertechnik an die neuen Anforderungen angepasst. Leistungsfähige Rechner ermöglichen heute die Durchführung aufwendiger Berechnungen, die vor einigen Jahren noch nicht oder nur in besonders geförderten Bereichen möglich waren. Zwischen dem Konstrukteur und dem Rechner dient die Software als Schnittstelle. Sie soll dem Entwickler die Eingabe des Problems in einer ihm vertrauten „Sprache“ ermöglichen. Die Software muß dann zum einen das Problem in eine für den Rechner verarbeitbare „Sprache“ transformieren, und zum anderen lösen. Folglich muß die Software Algorithmen zur Modellbildung und zur Problemlösung beinhalten.

In vielen Fällen sind technische Produkte keinem einzelnen Fachgebiet mehr zuzuordnen. Sie bestehen vielmehr aus mechanischen, elektrischen und informationsverarbeitenden Komponenten. Diese mechatronischen Produkte bereiten beim Computereinsatz erhebliche Probleme, da die dazu zur Verfügung stehende Software eine erhebliche Abstraktion des Problems voraussetzt. Die „Sprache“, in der man dem Computer das Problem eingibt, entspricht in der Regel nicht der „Sprache“ des Entwicklers.

Die Entwicklung von Software, die dem Entwickler eine effiziente Eingabe des Problems bietet und weiterhin eine effiziente Lösung des Problems erlaubt, erfordert eine enge Zusammenarbeit zwischen den Experten der jeweiligen Fachgebiete und den Informatikern. Hierzu soll diese Arbeit einen Beitrag leisten. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Starrkörpersysteme behandelt, die oft die mechanische Grundstruktur wie bei Manipulatoren bilden.

Im Anschluß an die Einführung in diese Arbeit wird zunächst ein Überblick über die Modellbildung gegeben. Das dritte Kapitel beschreibt die Modellbildung von Starrkörpersystemen. Wie man mit verschiedenen Softwarepaketen Starrkörpersysteme modelliert, zeigt das darauffolgende Kapitel. Das letzte Kapitel faßt die Ausführungen und

Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf die weiteren Entwicklungsmöglichkeiten von Modellbildungssoftware.

Um die Methoden in den Kapiteln drei und vier zu demonstrieren, befinden sich im Anhang zwei Fallbeispiele. Bei dem ersten Fallbeispiel handelt es sich um einen Schubkurbeltrieb, der Teil eines Verbrennungsmotors ist. Das zweite Fallbeispiel beinhaltet eine Kufe, die eine Abstraktion eines Wagens ist, bei der die Räder einer Achse lenkbar und die der anderen nicht lenkbar sind.



## 2 Modellbildung

Unter einem *System* versteht man das Objekt der Betrachtung. Ein *Modell* ist ein begrenztes Abbild von einem System. Den Prozeß, von einem System ein Modell zu bilden, bezeichnet man als *Modellbildung*. Die Modellbildung ist eine zentrale Methode der Systemtheorie, die eine fachübergreifende Beschreibung von Systemen und Methoden zur Lösung von Problemen bezüglich solcher Systeme beinhaltet.

### 2.1 Motivation zur Modellbildung

Die Lösung eines Problems besteht zum Teil aus dem Auffinden von Antworten auf Fragen, die ein System betreffen. Dabei können die Antworten durch die Interpretation von Ergebnissen aus *Experimenten* am System erhalten werden. Ein solches Experiment besteht aus dem gezielten Einwirken auf das System bei gleichzeitiger Erfassung bestimmter Systemveränderungen (Abbildung 1).

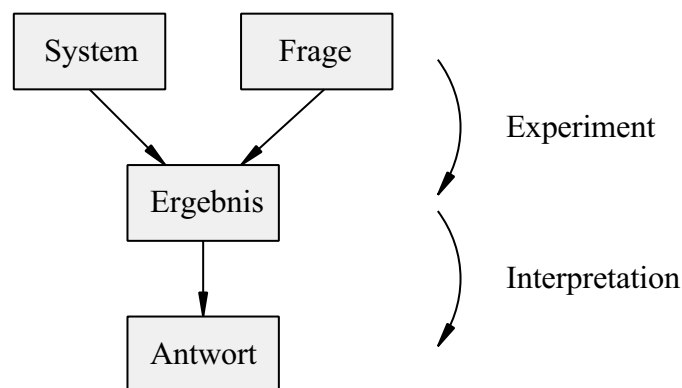


Abbildung 1: Experiment am System

Diese Vorgehensweise ist jedoch unmöglich, wenn das System noch nicht existiert, sondern erst zu schaffen ist. Auch wenn das System bereits existiert, sprechen verschiedene Gründe dennoch gegen die direkte Ausführung eines Experimentes am System:

- Das Experiment ist nicht realisierbar.
- Die Systemveränderungen sind zu schnell oder zu langsam.
- Das Experiment ist mit nicht vertretbar hohen Kosten verbunden.

- Durch das Experiment entstehen große Gefahren.
- Das System ist zu klein oder zu groß.
- Der Einfluß des Experimentes beeinflusst die Systemveränderung zu stark.
- Die Systemveränderung soll vorausgesagt werden.

Eine Abhilfe ist es, von dem System ein Modell zu bilden und das Experiment dann stellvertretend am Modell durchzuführen. Das Experiment am Modell bezeichnet man allgemein als *Simulation*, da es sich nicht um wirkliche Einwirkungen auf das System sowie wirkliche Systemveränderungen handelt (Abbildung 2).

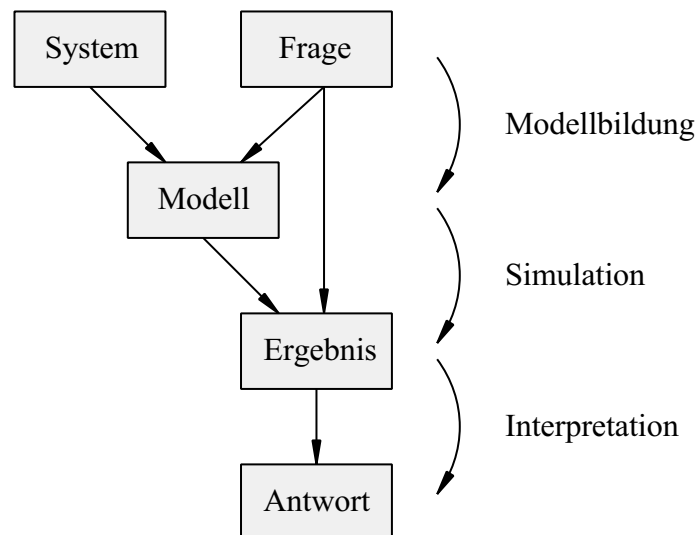


Abbildung 2: Simulation am Modell

Ein Modell ist aber immer nur ein begrenztes Abbild von einem System. Folglich besteht die Gefahr der falschen Interpretation von Ergebnissen aus einer Simulation. Diese Gefahr ist jedoch geringer einzuschätzen, wenn man sich bei der Modellbildung immer bewußt ist, welche Aspekte das Modell vom System beschreibt und welche nicht.

## 2.2 Aufbau eines Systems

Ein System setzt sich aus *Elementen* und *Beziehungen* zusammen. Die Beziehungen lassen sich in Beziehungen zwischen den Elementen untereinander und in Beziehungen

zwischen den Elementen und der Umgebung unterteilen. Sowohl die Elemente als auch die Beziehungen sind durch *Attribute* gekennzeichnet. Ein von der Zeit unabhängiges Attribut heißt *Parameter*. Die zur Beschreibung des Systemverhaltens notwendigen zeitabhängigen Attribute nennt man *Zustandsgrößen*.

Bei den Attributen, die die Beziehungen zwischen den Elementen und der Umgebung kennzeichnen, ist zwischen *Ein-* und *Ausgangsgrößen* zu unterscheiden. Die Eingangsgrößen wirken von der Umgebung auf das System ein. Hierdurch wird der Systemzustand beeinflusst. Die sich aus den Eingangsgrößen und den Zustandsgrößen ergebenden Ausgangsgrößen wirken wiederum vom System auf die Umgebung. Das System ist demnach ein Übertragungsglied, das Eingangsgrößen auf Ausgangsgrößen überträgt. In Abbildung 3 ist das System als Block mit Ein- und Ausgangsgrößen dargestellt.

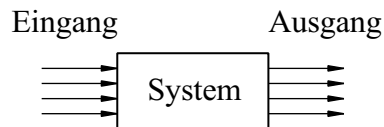


Abbildung 3: System als Block mit Ein- und Ausgangsgrößen

Mehrere Systeme können miteinander in Verbindung stehen und so ein neues System bilden. Dabei kann der Ausgang eines Systems der Eingang eines anderen Systems sein. Die unbelegten Eingänge sind die neuen Eingänge und die unbelegten Ausgänge sind die neuen Ausgänge des neuen Systems. Durch die Verbindung der Systeme wird die Struktur des neuen Systems festgelegt (Abbildung 4).

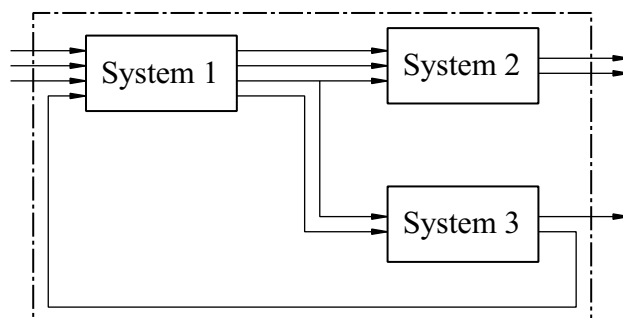


Abbildung 4: Struktur eines neuen Systems

Der Inhalt eines Systems ist vom Betrachter zu wählen. Ein System ist das, was als System betrachtet wird. Die Grenze zwischen System und Umgebung ist aber

so zu ziehen, daß die Lösung des Problems möglichst einfach zu finden ist. Dieses Einteilungsprinzip findet man an verschiedenen Stellen in der Mechanik. Dazu gehören unter anderem das Schnittprinzip und der Kontrollraum.

### 2.3 Bildung eines mentalen Modells

Zu Beginn der Modellbildung muß das zu modellierende System abgegrenzt werden. Je nachdem, ob das System, von dem ein Modell zu bilden ist, bereits existiert oder erst zu schaffen ist, unterscheidet sich die Modellbildung. Existiert das System, so liegt es in all seinen Einzelheiten vor. Bei einem nicht existierenden System besteht jedoch nur eine grobe Vorstellung desselben, die in der Regel auf ähnliche Komponenten bereits existierender Systeme beruht.

In einem weiteren Schritt ist das System zu analysieren. Dabei werden die Elemente, Beziehungen und Attribute des Systems bestimmt. Weiterhin erfolgt die Unterscheidung zwischen Ein-, Aus-, und Zustandsgrößen sowie Parametern. Dieser Schritt der Modellbildung erfordert vom Modellbilder die Durchdringung des Systems, die ihm dann ein tieferes Verständnis über das Wirken im System liefert.

Wenn das System analysiert ist, stellt sich die Frage, welche Eigenschaften, also welche Elemente, Beziehungen und Attribute, auf das Modell abgebildet werden sollen. An dieser Stelle legt der Modellbilder im wesentlichen die *Modelltiefe* fest. Allgemein läßt sich hierzu sagen:

Ein Modell soll nur die Eigenschaften des Systems beinhalten, die notwendig sind, um die Frage hinreichend beantworten zu können.

Diese Aussage fordert, daß nicht nur das System zu durchdringen ist, sondern auch die Frage genau zu formulieren ist. Weiterhin ergeben sich daraus mehrere Modelle für ein System, je nachdem wie die Frage lautet. Das Modell soll durch die obige Forderung so genau wie nötig und so einfach wie möglich werden.

Durch diese Auswahl der Eigenschaften erreicht man, daß das Modell für weitere Modellierungsschritte und für die Simulation nicht zu komplex ist. Zudem werden die wichtigen Eigenschaften hervorgehoben, wodurch der Systemanalytiker den Ursache-Wirkung-Zusammenhang besser überblicken kann. Demgegenüber steht der Nachteil, daß das Modell nur zur Beantwortung der zugrundeliegenden Frage einsetzbar ist.

Am Ende dieses Prozesses hat sich der Modellbilder ein *mentales Modell* des Systems geschaffen. Mentale Modelle sind somit durch Abstraktion des Systems entstandene Modelle, die nur im menschlichen Bewußtsein existieren. Während der Modellbildung wurden die unstrukturierten Informationen über das System in strukturierte Informationen über das mentale Modell überführt.

Der beschriebene Prozeß ist ein Prozeß der Erkenntnisgewinnung. Die bei diesem Prozeß erhaltenen mentalen Modelle sind die Grundlage des menschlichen Verstehens und Handelns, da sie ein Konzept beinhalten, die der Mensch bezüglich eines Systems hat. Jede Auseinandersetzung mit einem System führt zum Aufbau oder zur Veränderung mentaler Modelle. Die erfolgreiche Interaktion mit einem System setzt mentale Modelle voraus, da nur so eine Ursache produziert werden kann, die die gewünschte Wirkung zur Folge hat.

## 2.4 Klassifikation der Modelle

Aufgrund ihrer Entstehung haben mentale Modelle sowohl heuristischen als auch intuitiven Charakter. Ihre Ungenauigkeit führt zu Problemen bei der Kommunikation. Weiterhin können an ihnen nur eingeschränkt Simulationen durchgeführt werden. In diesem Zusammenhang stellen *symbolische* und *physikalische Modelle* grundlegende Ansätze zur Beschreibung mentaler Modelle dar. Diese Modelle erleichtern, bedingt durch ihre Repräsentation, die Kommunikation. Zudem unterscheiden sich alle drei Modellarten hinsichtlich ihrer Eignung, Simulationen an ihnen durchzuführen.

Zu den symbolischen Modellen gehören die *grafischen Modelle*, wie hydraulische oder pneumatische Schaltpläne, Blockschaltbilder, elektrische Netzwerke und mechanische Strukturbilder. Alle diese fachspezifischen, grafischen Darstellungen definieren die Elemente, Beziehungen und Attribute eines Systems.

Neben den grafischen Modellen sind auch *mathematische* und *algorithmische Modelle* symbolische Modelle. Das mathematische Modell besteht aus der Gesamtheit der mathematischen Relationen, die die Elemente und Beziehungen beschreiben. Dabei werden den Attributen Variablen zugeordnet und die Relationen in Abhängigkeit der Variablen formuliert. Das algorithmische Modell unterscheidet sich vom mathematischen Modell in der Organisation der Relationen. Bei ihm sind die Relationen so organisiert, daß sie mit entsprechenden Verfahren schrittweise lösbar sind. Modelle

in Form von Programmen, die von einem Rechner direkt verarbeitet werden können, heißen *rechnerinterne Modelle*.

Die grafischen Modelle sind eine gute Basis für die Kommunikation zwischen verschiedenen Personen, da sie einerseits eng mit den mentalen Bildern einer Person, andererseits wegen ihrer bildlichen Darstellungsart leicht von anderen zu überschauen sind. Sie sind aber weniger für eine Simulation geeignet. Gegenüber den grafischen Modellen sind die mathematischen und algorithmischen Modelle präziser und sehr gut als Ausgangsbasis für eine Simulation geeignet. Bedingt durch ihre Abstraktheit eignen sie sich aber schlechter zur Kommunikation. Rechnerinterne Modelle dienen ausschließlich zur Simulation.

Bedeutende physikalische Modelle sind *maßstäbliche*, *imitative* und *analoge Modelle*. Zu den maßstäblichen Modellen gehören zum Beispiel Modelle von Autos, Schiffen und Flugzeugen, die in einer künstlichen Umgebung untersucht werden. Über Ähnlichkeitsgesetze kann man dann auf das Verhalten des Systems zurückschließen. Imitative Modelle sind zum Beispiel Molekül- oder Organmodelle, die im wesentlichen zur Anschauung dienen. Analoge Modelle beruhen auf Analogien zwischen verschiedenen Fachdisziplinen. So sind mechanische Strukturen aus Massen, Federn und Dämpfern durch elektrische Netzwerke aus Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen darstellbar.

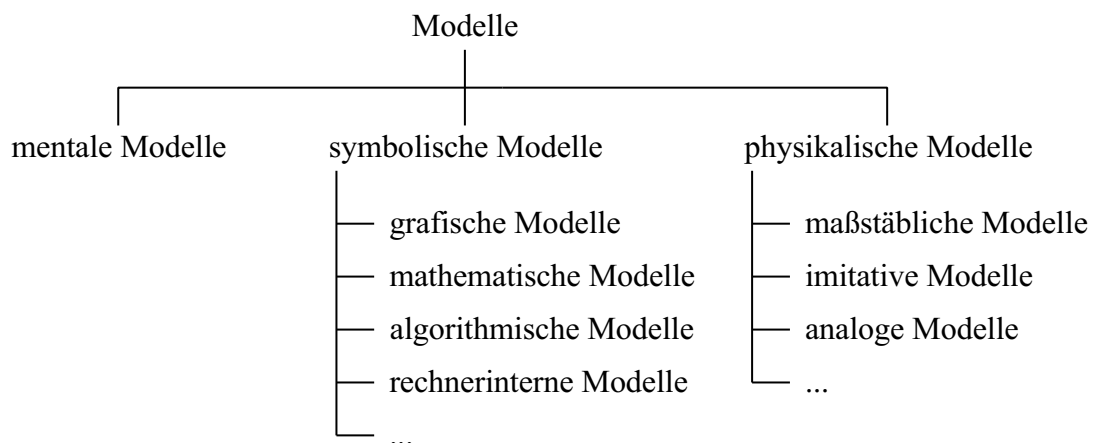


Abbildung 5: Klassifikation der Modelle

## 2.5 Bildung eines rechnerinternen Modells

Wenn es das Ziel ist, ein rechnerinternes Modell von einem System zu bilden, dann wird der Prozeß der Modellbildung über mehrere Zwischenmodelle vollzogen. Die erste Modellart ist stets ein mentales Modell. Soll der Rechner nicht nur als Simulationswerkzeug dienen, sondern auch die Modellbildung unterstützen, dann ist an irgendeiner Stelle im Modellbildungsprozeß das Modell in den Rechner einzugeben.

Anzustreben ist es, das mentale Modell in den Rechner einzugeben, um Fehler bei der Formalisierung zu vermeiden und komplexe Systeme handhabbarer zu machen. Die Eingabe geschieht am sinnvollsten über ein grafisches Modell, dessen grafische Elemente das Modellbildungsprogramm bereitgestellt. Der Modellbilder muß dann die Elemente auswählen und die Beziehungen eingeben.

Von dem grafischen Modell sind die mathematischen Relationen abzuleiten, die das mathematische Modell bilden. Durch eine entsprechende Aufbereitung der Relationen ergibt sich das algorithmische Modell, das abschließend in ein rechnerinternes Modell überführt wird.

Der Weg vom System zum rechnerinternen Modell ist durch eine ständige Abstraktion und Formalisierung gekennzeichnet. Bei jedem Modellbildungsschritt gehen Eigenschaften verloren, wodurch die verbleibenden hervorgehoben werden. Weiterhin hängt es vom jeweiligen Formalismus ab, welche Form das Modell hat. So kann es zu einem mentalen Modell mehrere grafische Modelle geben. Ebenso ergeben sich unterschiedliche mathematische Modelle, je nachdem über welchen Formalismus die Relationen abgeleitet werden. Letztlich sind von einem mathematischen Modell unterschiedliche algorithmische Modelle und davon unterschiedliche rechnerinterne Modelle generierbar.

Die ausgewählten Modellbildungsverfahren haben deshalb einen erheblichen Einfluß auf die Komplexität und Performanz des rechnerinternen Modells. Neben den Eigenschaften, die ein Modell hat, können auch die Komplexität und Performanz zur Wiederholung von Modellbildungsschritten führen. Die Modellbildung erhält dadurch einen iterativen Charakter (Abbildung 6).

Bei der Bildung eines Modells gibt es hinsichtlich der Gestalt und der Funktion eines Systems die beiden Extremfälle eines *Gestaltmodells* und eines *Funktionsmodells*. Inwieweit die Modellierung von Gestalt und Funktion trennbar ist, hängt vom System und der Fragestellung ab. Meistens umfaßt das Modell Gestalt und Funktion in unter-

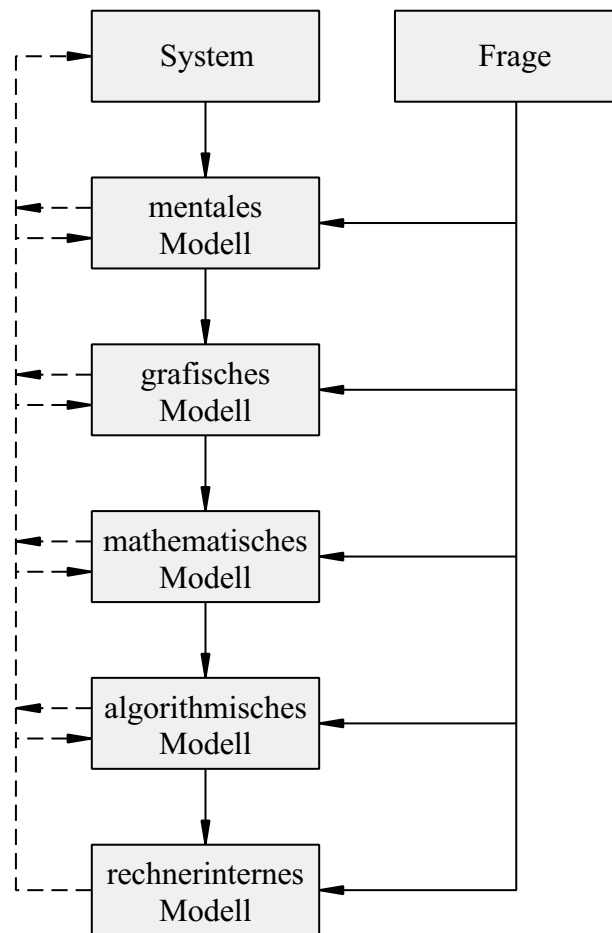


Abbildung 6: Bildung eines rechnerinternen Modells

schiedlichen Modellierungstiefen. Ist sowohl die Gestalt als auch die Funktion in einem rechnerinternen Modell abgebildet, dann kann das System animiert werden.

## 2.6 Parameteridentifikation und Verifikation des Modells

Bevor ein rechnerinternes Modell zur Simulation nutzbar ist, sind noch zwei Schritte zu vollziehen. Zum einen müssen die Parameter des Modells bestimmt werden. Zum anderen ist das Modell auf Abbildungstreue zu überprüfen. Erst dann ergibt die Simulation Ergebnisse, die auf das wahre Systemverhalten zurückschließen lassen.

Wenn es möglich ist, können die Parameter a priori gewählt werden. In vielen Fällen, besonders bei komplexen Systemen, ist das aber nicht möglich. Der Grund dafür liegt in der mangelnden Kenntnis über die zugrundeliegenden Effekte. So ist es bei techni-



schen Systemen häufig schwierig, Parameter komplexer Materialien oder Parameter für Kontaktvorgänge zu erhalten. Daher bleibt nur die Möglichkeit, diese Parameter aus Erfahrung oder aus Experimenten am System zu erhalten. Der letzte Fall entspricht einer *Parameteridentifikation*.

Sind die Parameter bestimmt, dann kann eine Simulation durchgeführt werden. Führt man ein zur Simulation entsprechendes Experiment am System durch, dann ist durch ein Vergleich der simulierten und der experimentell ermittelten Ergebnisse das Modell auf Abbildungstreue überprüfbar. Dieser als *Verifikation* bezeichnete Vorgang führt zu einer *Validierung* oder zu einer *Falsifizierung* des Modells.

Die Validierung ist eine Bestätigung der Übereinstimmung zwischen System und Modell innerhalb des Gültigkeitsbereiches. Bei einer Falsifizierung weichen die Ergebnisse zu stark ab. Die Folge ist eine Nachbesserung des Modells innerhalb der verschiedenen Phasen der Modellbildung. Auch hier wird der iterative Charakter der Modellbildung deutlich. Da eine exakte Übereinstimmung zwischen simulierten und experimentell ermittelten Ergebnissen unrealistisch ist, ist ein Beweis eines Modells nicht möglich.

Falls das System nicht existiert, sind die ergänzten Schritte nicht vollziehbar, da sie die Existenz des Systems voraussetzen. In diesem Fall muß man sich zunächst auf a priori-Parameter und Plausibilitätstests beschränken.

## 2.7 Klassifikation der Systeme

Systeme können hinsichtlich verschiedener Merkmale klassifiziert werden. Da Modelle Abbilder von Systemen sind, bezieht sich die Klassifikation auch auf die Modelle. Die Klassifikation hat besonders im Hinblick auf eine Abbildung des Systems in den Rechner Bedeutung, da die Merkmale einen Einfluß auf die Verfahrensauswahl bei der Simulation haben. Im nachfolgenden sind die wichtigsten Merkmale kurz definiert.

- *Statisch, stationär, dynamisch*: Ein System, bei dem sich die Zustände nicht ändern, heißt statisch. Ist die zeitliche Änderung des Zustandes konstant, bezeichnet man es als stationär. Dagegen handelt es sich um ein dynamisches System, wenn die Zustandsänderung von der Zeit abhängt.
- *Linear, nichtlinear*: Es wird zwischen linearen und nichtlinearen Systemen unterschieden. Der Ausgangspunkt ist die Definition eines linearen Systems. Ein

lineares System muß zum einen das *Überlagerungsprinzip* und zum anderen das *Verstärkungsprinzip* erfüllen. Systeme, die eines der beiden Prinzipien nicht erfüllen, bezeichnet man als nichtlinear. Wenn  $y_1$  und  $y_2$  die zu den Eingängen  $u_1$  und  $u_2$  gehörenden Ausgänge sind, dann besagt das Überlagerungsprinzip, daß  $y_1 + y_2$  der zum Eingang  $u_1 + u_2$  gehörende Ausgang ist. Somit sind die Summation und die Operation, die den Eingang  $u$  auf den Ausgang  $y$  abbildet, vertauschbar. Das Verstärkungsprinzip besagt, daß der zum Eingang  $c u$  gehörende Ausgang  $c y$  ist, falls  $y$  der Ausgang zum Eingang  $u$  und  $c$  eine konstante Zahl ist. Daher sind hier die Multiplikation mit einer konstanten Zahl und die Operation vertauschbar.

- *Zeitvariant, zeitinvariant*: Man unterscheidet zeitvariante und zeitinvariante Systeme. Der Ausgangspunkt ist die Definition eines zeitinvariantes System. Ein zeitinvariantes System muß das *Verschiebungsprinzip* erfüllen. Systeme, die das Verschiebungsprinzip nicht erfüllen bezeichnet man als zeitvariant. Wenn wieder  $y$  der Ausgang zum Eingang  $u$  ist, dann erfüllt ein System das Verschiebungsprinzip, wenn  $y(t - \tau)$  der Ausgang zum Eingang  $u(t - \tau)$  ist. Bei diesem Prinzip sind die zeitliche Verschiebung um  $\tau$  und die Operation vertauschbar. Solche Systeme werden durch Differential- oder Differenzgleichungen mit zeitlich konstanten Koeffizienten beschrieben.
- *Diskret, kontinuierlich*: Systeme mit diskreten Parametern haben nur eine unabhängige Variable, die Zeit. Sie werden durch gewöhnliche Differential- oder Differenzgleichungen beschrieben. Dagegen haben Systeme mit kontinuierlichen Parametern neben der Zeit noch räumliche Koordinaten als unabhängige Variablen. Diese Systeme werden durch partielle Differential- oder Differenzgleichungen dargestellt.
- *Zeitdiskret, zeitkontinuierlich*: Attribute zeitkontinuierlicher Systeme sind über ein kontinuierliches Zeitintervall definiert, wogegen die Attribute bei zeitdiskreten Systemen nur für bestimmte Zeitpunkte definiert sind. Zeitkontinuierliche Systeme werden durch Differentialgleichungen und zeitdiskrete Systeme durch Differenzgleichungen beschrieben.
- *Deterministisch, stochastisch*: Bei deterministischen Systemen sind die Attribute zu jedem Zeitpunkt vorhersagbar. Dagegen kann man sie bei stochastischen Systemen nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vorhersagen.

### 3 Modellbildung von Starrkörpersystemen

Die Modellbildung bezieht sich hier auf die Bildung eines mathematischen Modells von einem Starrkörpersystem. Dieses mathematische Modell beschreibt das Starrkörpersystem hinsichtlich seiner *Kinematik* und *Dynamik*. Ausgangspunkt der Modellbildung ist ein grafisches Modell des Starrkörpersystems, das das mentale Modell beschreibt.

Zur Bildung des mathematischen Modells gehört eine Beschreibung der Elemente sowie der Beziehungen des Starrkörpersystems. Die aus den Beziehungen resultierenden Relationen heißen *Zwangsbedingungen*. Als *Bewegungsgleichungen* bezeichnet man die zu den Elementen gehörenden Gleichungen. Zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen gibt es zwei Strategien:

1. Mit den NEWTON-EULER-Gleichungen der *klassischen Mechanik* beschreibt man die Elemente lokal.
2. Mit den Prinzipien der *analytischen Mechanik* erfolgt die Beschreibung der Elemente dagegen global.

Zu den Prinzipien der analytischen Mechanik gehören unter anderem das Prinzip von D'ALEMBERT, das Prinzip von JOURDAIN und das Prinzip von GAUSS.

#### 3.1 Elemente und Beziehungen eines Starrkörpersystems

In der Mechanik wählt man in der Regel den stofflichen Zusammenhalt als Ordnungsgesichtspunkt, um reale Körper einzuteilen. Danach wird zwischen starren, elastischen, plastischen, flüssigen und gasförmigen Körpern unterschieden. Charakteristisch für den starren Körper sind die festen Abstände seiner Körperpunkte. Da der starre Körper die Idealisierung eines realen Körpers ist, handelt es sich beim starren Körper schon um ein Modell eines realen Körpers.

Aus den festen Abständen der Körperpunkte beim starren Körper folgt, daß reale Körper nur dann durch starre Körper modellierbar sind, wenn die Verformung des realen Körpers in bezug auf die Fragestellung nicht von Bedeutung ist. Bedingt durch die Vernachlässigung der Verformung gibt der starre Körper nur die Eigenschaften *Trägheit* und *Schwere* wieder, nicht aber Eigenschaften wie zum Beispiel *Nachgiebigkeit* und *Reibung*.

Die getrennte Betrachtung der Eigenschaften Trägheit und Schwere einerseits, sowie Nachgiebigkeit und Reibung andererseits führt zu Systemen mit diskreten Parametern, da die Eigenschaften des starren Körpers nicht von räumlichen Koordinaten abhängen. In vielen Fällen sind die Systeme zusätzlich zeitinvariant und zeitkontinuierlich. Dementsprechend erfolgt die mathematische Beschreibung mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen mit zeitlich konstanten Koeffizienten.

Die Elemente eines Starrkörpersystems sind die *starrten Körper*. Eine Erweiterung der Starrkörpersysteme kann durch Elemente erfolgen, die Energie einleiten, dissipieren oder speichern. Zu den Attributen des starren Körpers gehören zum Beispiel die *Koordinaten*, die *Geschwindigkeiten* und die *Beschleunigungen*.

Durch die Koordinaten wird die *Position* und die *Orientierung* des starren Körpers festgelegt. Mit den drei kartesischen Koordinaten des Schwerpunktes ist zum Beispiel die Position und mit den drei EULER-Winkeln die Orientierung angebar. Insgesamt ergeben sich also immer sechs Koordinaten pro Körper. Ein System aus  $\mu$  starren Körpern hat folglich

$$f = 6 \mu$$

Koordinaten  $x_1 \dots x_f$ . Die zeitlichen Ableitungen der Koordinaten sind die Geschwindigkeiten  $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_f$  und die Beschleunigungen  $\ddot{x}_1 \dots \ddot{x}_f$ . Eine konkrete Ausprägung der Koordinaten heißt *Konfiguration* des Starrkörpersystems. Die *Bewegung* des Starrkörpersystems wird durch eine Ausprägung der Geschwindigkeiten festgelegt.

Die *Kräfte* und *Momente*, die zwischen den starren Körpern untereinander und zwischen den starren Körpern und der Umgebung wirken, stellen die Beziehungen des Systems dar. Dabei unterscheidet man zwei Arten von Kräften und Momenten. Solche, die die Konfiguration oder die Bewegung des Systems einschränken, heißen *Zwangskräfte* und *-momente*. Alle anderen heißen *eingeprägte Kräfte* und *Momente*.

In welche Richtungen Zwangskräfte und um welche Achsen Zwangsmomente wirken können, legt die Geometrie der starren Körper und der Umgebung in den Kontaktbereichen fest. Indem die Kontaktbereiche durch Gelenke symbolisiert werden, erhält man eine übersichtliche Darstellung der Kontaktverhältnisse. Überträgt ein Gelenk  $m$  Zwangskräfte und -momente, dann hat ein System mit  $\nu$  Gelenken

$$o = \sum_{i=1}^{\nu} m_i$$

*Zwangsgrößen*  $z_1 \dots z_o$ .

gelenk und die Schneide hervorgerufen. Die Antriebskraft  $F$ , das Lenkmoment  $M$  und die Gewichtskraft  $G_K$  sind eingeprägte Kräfte oder Momente.

### 3.2 Zwangsbedingungen

Die Zwangskräfte und -momente resultieren aus kinematischen Zwängen des Systems, die ihren Ursprung in den Gelenken haben. Man kann jeden Zwang durch eine Gleichung beschreiben, die die Abhängigkeiten zwischen den Koordinaten und/oder den Geschwindigkeiten wiedergeben. Jede Zwangsgröße korrespondiert mit einer Zwangsbedingung, die die mathematische Beschreibung der Beziehung ist.

Je nach Struktur der Zwangsbedingungen unterscheidet man zwischen *holonomen* und *nichtholonomen* sowie *skleronomen* und *rheonomen* Zwangsbedingungen. Skleronome Bedingungen sind zeitunabhängig. Dagegen sind rheonome Bedingungen Funktionen der Zeit. Treten in den Bedingungen Geschwindigkeiten auf, so heißen sie nichtholonom, andernfalls holonom.

Eine rheonom holonome Bedingung läßt sich stets in der Form

$$f(x_1 \dots x_f, t) = 0$$

und eine rheonom nichtholonome Bedingung in der Form

$$f(x_1 \dots x_f, \dot{x}_1 \dots \dot{x}_f, t) = 0$$

darstellen. Bei den skleronomen Bedingungen fehlt in den Ausdrücken die Abhängigkeit von der Zeit.

Jede holonome Zwangsbedingung führt zu einer abhängigen Koordinate. Kann man für ein System  $r$  holonome Zwangsbedingungen angeben, dann reichen  $f - r$  Koordinaten aus, um die Konfiguration des Systems festzulegen. Man sagt auch: Das System hat

$$n = f - r$$

*Freiheitsgrade im Großen* oder *verallgemeinerte Koordinaten*  $q_1 \dots q_n$ , wobei gilt:

$$x_i = x_i(q_1 \dots q_n, t) \quad i = 1 \dots f.$$

Aus den ersten zeitlichen Ableitungen der holonomen Zwangsbedingungen folgt, daß nur die  $n$  Geschwindigkeiten  $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$  unabhängig sind. Ebenso sind nur die  $n$  Beschleunigungen  $\ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_n$  unabhängig. Das resultiert aus den zweiten zeitlichen Ableitungen der holonomen Zwangsbedingungen.

Jede nichtholonome Zwangsbedingung führt zu einer abhängigen Geschwindigkeit. Bei  $s$  nichtholonomen Zwangsbedingungen sind deshalb nur  $n - s$  Geschwindigkeiten unabhängig. Ein solches System hat

$$p = n - s = f - r - s$$

*Freiheitsgrade im Kleinen* oder *verallgemeinerte Geschwindigkeiten*<sup>1</sup>  $u_1 \dots u_p$ , wobei gilt:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(u_1 \dots u_p, t) \quad i = 1 \dots n.$$

Die Beziehungen zwischen den zeitlichen Ableitungen der verallgemeinerten Koordinaten und den verallgemeinerten Geschwindigkeiten heißen *kinematische Differentialgleichungen*. Aufgrund der ersten zeitlichen Ableitungen der nichtholonomen Zwangsbedingungen sind nur noch die  $p$  Beschleunigungen  $\dot{u}_1 \dots \dot{u}_p$  unabhängig.

Ein System mit  $f$  Koordinaten,  $r$  holonomen und  $s$  nichtholonomen Zwangsbedingungen hat also

- $n = f - r$  verallgemeinerte Koordinaten  $q_1 \dots q_n$ ,
- $p = n - s$  verallgemeinerte Geschwindigkeiten  $u_1 \dots u_p$  und Beschleunigungen  $\dot{u}_1 \dots \dot{u}_p$ .

Die  $n$  verallgemeinerten Koordinaten bilden zusammen mit den  $p$  verallgemeinerten Geschwindigkeiten die  $n + p$  Zustände des Systems. Durch die reduzierte Anzahl an Zuständen reduziert sich ebenfalls die Ordnung des Differentialgleichungssystems von  $2f$  auf  $n + p$ .

Bei den nichtholonomen Zwangsbedingungen reicht es im allgemeinen aus, nur solche zu betrachten, bei denen die Geschwindigkeiten linear auftreten. Sie haben dann die Form

$$\sum_{i=1}^f f_i(x_1 \dots x_f, t) \dot{x}_i + f_0(x_1 \dots x_f, t) = 0.$$

Bildet man die zeitliche Ableitung

$$\dot{f}(x_1 \dots x_f, t) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial f(x_1 \dots x_f, t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f(x_1 \dots x_f, t)}{\partial t} = 0$$

---

<sup>1</sup>Im Gegensatz zu [5] sind die verallgemeinerten Geschwindigkeiten hier, in Anlehnung an die verallgemeinerten Koordinaten, als unabhängige Geschwindigkeiten definiert.

einer holonomen Zwangsbedingung, dann sind beide Typen von Zwangsbedingungen in der PFAFFSchen Form

$$\sum_{i=1}^f a_i(x_1 \dots x_f, t) \dot{x}_i + a_0(x_1 \dots x_f, t) = 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^f a_i(x_1 \dots x_f, t) dx_i + a_0(x_1 \dots x_f, t) dt = 0$$

darstellbar.

### 3.3 Newton-Euler-Gleichungen

Der von NEWTON aufgestellte *Impulssatz* für den Massenpunkt wurde von EULER erweitert und um den *Drehimpulssatz* ergänzt, um die Bewegung von starren Körpern unter den Einfluß von Kräften und Momenten zu beschreiben. Der Impulssatz hat axiomatischen Charakter. Dagegen ist der Drehimpulssatz aus dem Impulssatz herleitbar. Will man mit den NEWTON-EULER-Gleichungen die starren Körper eines Starrkörpersystems beschreiben, so sind für jeden starren Körper der Impuls- und der Drehimpulssatz aufzustellen.

Der Impulssatz für einen starren Körper  $i$

$$\dot{\mathbf{I}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^e + \mathbf{F}_i^z \quad i = 1 \dots \mu$$

sagt aus, daß die *Translation* des Körpers durch die Einwirkung aller am Körper angreifenden Kräfte  $\mathbf{F}_i$  beeinflusst wird. In dem Ausdruck ist  $\mathbf{I}_i$  der *Impuls* des starren Körpers und  $\mathbf{F}_i$  ist die am starren Körper angreifende resultierende Kraft, die sich aus der resultierenden eingepprägten Kraft  $\mathbf{F}_i^e$  und der resultierenden Zwangskraft  $\mathbf{F}_i^z$  zusammensetzt.

Analog drückt der Drehimpulssatz für einen starren Körper  $i$

$$\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} = \mathbf{M}_i^{S_i} = \mathbf{M}_i^{S_i/e} + \mathbf{M}_i^{S_i/z} \quad i = 1 \dots \mu$$

aus, daß alle am Körper angreifenden Momente  $\mathbf{M}_i^{S_i}$  die *Rotation* des Körpers beeinflussen. Dabei ist  $\mathbf{D}_i^{S_i}$  der *Drehimpuls* des starren Körpers und  $\mathbf{M}_i^{S_i}$  das am starren Körper angreifende resultierende Moment, das sich aus dem resultierenden eingepprägten Moment  $\mathbf{M}_i^{S_i/e}$  und dem resultierenden Zwangsmoment  $\mathbf{M}_i^{S_i/z}$  zusammensetzt. Die Größen beziehen sich hier auf den Schwerpunkt  $S_i$  des starren Körpers  $i$ .

größen berechnen. Bei dem Gleichungssystem handelt es sich in der Regel um ein differential-algebraisches Gleichungssystem.

Ein algorithmisches Modell erhält man, indem zuerst aus den Zwangsbedingungen und deren zeitliche Ableitungen explizite Gleichungen für die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen berechnet werden. Durch Einsetzen der abhängigen Größen in die NEWTON-EULER-Gleichungen hängen diese nur noch von den verallgemeinerten Koordinaten  $q_1 \dots q_n$ , den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $u_1 \dots u_p$ , den Beschleunigungen  $\dot{u}_1 \dots \dot{u}_p$  und den Zwangsgrößen  $z_1 \dots z_o$  ab.

Die modifizierten  $6\mu = p + o$  NEWTON-EULER-Gleichungen sind leicht nach den  $p$  Beschleunigungen und  $o$  Zwangsgrößen auflösbar, da diese Größen linear in den Gleichungen auftreten. Um einen vollständigen Satz an Gleichungen zu erhalten, sind die  $n$  kinematischen Differentialgleichungen hinzuzufügen. Die Gleichungen haben allgemein die Form

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= g_i(u_1 \dots u_p) & i &= 1 \dots n \\ \dot{u}_i &= g_i(q_1 \dots q_n, u_1 \dots u_p) & i &= n + 1 \dots n + p \\ z_i &= h_i(q_1 \dots q_n, u_1 \dots u_p) & i &= 1 \dots o. \end{aligned}$$

Aus den  $n + p$  Gleichungen  $g_i$  sind die zeitlichen Verläufe der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten berechenbar. Die  $o$  Gleichungen  $h_i$  liefern die Zwangsgrößen in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten.

Im allgemeinen Fall sind die Zwangsbedingungen und deren zeitliche Ableitungen aber nicht nach den abhängigen Größen auflösbar. Dann ist ein anderes algorithmisches Modell nötig, um zum Beispiel vor jedem numerischen Integrationsschritt das Gleichungssystem der Zwangsbedingungen numerisch zu lösen.

### 3.4 Prinzip von D'Alembert

Eine zu den NEWTON-EULER-Gleichungen alternative Methode, mathematische Modelle von Starrkörpersystemen aufzustellen, ist das Prinzip von D'ALEMBERT. Hierzu wird der Begriff der *virtuellen Arbeit* benötigt. Unter der virtuellen Arbeit  $\delta A$  versteht man die Arbeit, die die Kräfte und Momente bei konstanter Zeit verrichten. Es gilt also:

$$\delta t = 0 \quad \delta x \neq 0 \quad \delta \dot{x} \neq 0 \quad \delta \ddot{x} \neq 0.$$



Da dies physikalisch unmöglich ist, handelt es sich bei der virtuellen Arbeit um eine mentale Größe.

Einen Ausdruck für die virtuelle Arbeit eines Starrkörpersystems erhält man, indem zunächst der Impulssatz für jeden starren Körper  $i$  mit der *virtuellen Verschiebung* des Schwerpunktes  $\delta \mathbf{r}_i^{S_i}$  und der Drehimpulssatz für jeden starren Körper  $i$  mit der *virtuellen Verdrehung* des starren Körpers  $\delta \varphi_i$  multipliziert wird. Der Ausdruck für die virtuelle Arbeit ergibt sich aus der Summe der erhaltenen Ausdrücke.

$$\delta A = \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \left( \dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e - \mathbf{F}_i^z \right) \delta \mathbf{r}_i^{S_i} + \left( \dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e} - \mathbf{M}_i^{S_i/z} \right) \delta \varphi_i \right\} = 0 \quad (1)$$

Bei einer Konfigurationsänderung unter konstanter Zeit ist die Zwangskraft zwischen einem starren Körper und der Umgebung orthogonal zur virtuellen Verschiebung des Kraftangriffspunktes. Ebenso ist ein Zwangsmoment zwischen einem starren Körper und der Umgebung orthogonal zur virtuellen Verdrehung des starren Körpers. Betrachtet man eine Zwangskraft oder ein Zwangsmoment zwischen zwei starren Körpern, dann verrichtet die Zwangskraft oder das Zwangsmoment zwar an jedem der beiden Körper eine virtuelle Arbeit, die sich jedoch in der Summe aufhebt. Deshalb gilt für die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte und -momente insgesamt:

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \mathbf{F}_i^z \delta \mathbf{r}_i^{S_i} + \mathbf{M}_i^{S_i/z} \delta \varphi_i \right\} = 0. \quad (2)$$

Die Zwangskräfte und -momente verrichten also keine virtuelle Arbeit am System.

Aus dem Ausdruck (1) für die virtuelle Arbeit und der Aussage (2) folgt, daß die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte und -momente sowie der eingepprägten Kräfte und Momente null ist. Dies ist die Aussage des D'ALEMBERTSchen Prinzips.

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \left( \dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e \right) \delta \mathbf{r}_i^{S_i} + \left( \dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e} \right) \delta \varphi_i \right\} = 0 \quad (3)$$

Je nachdem in Abhängigkeit welcher Koordinaten die Kinematik ausgedrückt wird und welchen Zwängen das System unterliegt, unterscheidet sich die Vorgehensweise zum Aufstellen des zugehörigen mathematischen Modells. Im nachfolgenden werden vier Fälle behandelt:

- Koordinaten  $x_1 \dots x_f$ , keine holonomen und nichtholonomen Zwänge
- Koordinaten  $x_1 \dots x_f$ , holonome und nichtholonome Zwänge

- Koordinaten  $q_1 \dots q_n$ , keine nichtholonomen Zwänge
- Koordinaten  $q_1 \dots q_n$ , nichtholonome Zwänge

### Koordinaten $x_1 \dots x_f$ , keine holonomen und nichtholonomen Zwänge

Drückt man die Verschiebungen und Verdrehungen in Abhängigkeit der Koordinaten  $x_1 \dots x_f$  des Starrkörpersystems aus, dann sind die virtuellen Verschiebungen der Schwerpunkte durch

$$\delta \mathbf{r}_i^{S_i} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial x_j} \delta x_j \quad i = 1 \dots \mu$$

und die virtuellen Verdrehungen durch

$$\delta \varphi_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad i = 1 \dots \mu$$

darstellbar. Aus diesen Ausdrücken und der Gleichung (3) folgt für die virtuelle Arbeit die Gleichung

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \left( \dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e \right) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial x_j} + \left( \dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\} \delta x_j = 0. \quad (4)$$

In dieser Gleichung sind die  $\mu$  virtuellen Verschiebungen der Schwerpunkte  $\delta \mathbf{r}_i^{S_i}$  und die  $\mu$  virtuellen Verdrehungen  $\delta \varphi_i$  durch die  $f$  virtuellen Verschiebungen  $\delta x_j$  ausgedrückt worden.

Sind die  $f$  virtuellen Verschiebungen  $\delta x_j$  unabhängig wählbar, kann die Gleichung (4) nur erfüllt sein, wenn die  $f$  Vorfaktoren

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \left( \dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e \right) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial x_j} + \left( \dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\} = 0 \quad j = 1 \dots f$$

null sind. Mit diesen  $f$  Gleichungen sind die  $f$  Koordinaten bestimmbar. Die  $f$  Gleichungen repräsentieren das mathematische Modell des Starrkörpersystems.

### Koordinaten $x_1 \dots x_f$ , holonome und nichtholonome Zwänge

Die  $f$  virtuellen Verschiebungen  $\delta x_j$  sind nicht unabhängig wählbar, wenn das Starrkörpersystem  $r$  holonomen und  $s$  nichtholonomen Zwängen unterliegt. In diesem Fall müssen die virtuellen Verschiebungen die Zwangsbedingungen in der PFAFFSchen Form

$$\sum_{j=1}^f a_{kj} \delta x_j = 0 \quad k = 1 \dots o = r + s$$

erfüllen. Bedingt durch die Abhängigkeit der virtuellen Verschiebungen ist es nicht mehr notwendig, daß die  $f$  Vorfaktoren null sind.

Multipliziert man jede der Zwangsbedingungen mit einem frei wählbaren LAGRANGESchen Faktor  $\lambda_k$

$$\lambda_k \sum_{j=1}^f a_{kj} \delta x_j = 0 \quad k = 1 \dots o$$

und addiert diese Gleichungen zur Gleichung (4), dann folgt daraus für die virtuelle Arbeit die Gleichung

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial x_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial x_j} \right\} \delta x_j + \sum_{k=1}^o \lambda_k \sum_{j=1}^f a_{kj} \delta x_j = 0$$

und nach Umordnung der Ausdrücke die Gleichung

$$\sum_{j=1}^f \left[ \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial x_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial x_j} \right\} + \sum_{k=1}^o \lambda_k a_{kj} \right] \delta x_j = 0. \quad (5)$$

Wählt man die  $o$  LAGRANGESchen Faktoren so, daß  $o$  Vorfaktoren der Gleichung (5) null werden, müssen die restlichen  $p$  Vorfaktoren null sein, da  $p$  virtuelle Verschiebungen  $\delta x_j$  unabhängig wählbar sind. Insgesamt erhält man die  $f$  Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial x_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial x_j} \right\} + \sum_{k=1}^o \lambda_k a_{kj} = 0 \quad j = 1 \dots f.$$

Mit diesen  $f$  Gleichungen und den  $o$  Zwangsbedingungen sind die  $f$  Koordinaten und die  $o$  LAGRANGESchen Faktoren bestimmbar. Das Gleichungssystem aus den  $f$  Gleichungen und den  $o$  Zwangsbedingungen ist das mathematische Modell des Starrkörpersystems.

Berechnet man zuerst aus den Zwangsbedingungen und deren zeitliche Ableitungen explizite Gleichungen für die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen und setzt die abhängigen Größen in die  $f$  Gleichungen ein, so hängen diese nur noch von den verallgemeinerten Koordinaten  $q_1 \dots q_n$ , den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $u_1 \dots u_p$ , den Beschleunigungen  $\dot{u}_1 \dots \dot{u}_p$  und den LAGRANGESchen Faktoren  $\lambda_1 \dots \lambda_o$  ab.

Ein algorithmisches Modell erhält man, indem die  $f = p + o$  Gleichungen des mathematischen Modells nach den  $p$  Beschleunigungen und den  $o$  LAGRANGESchen Faktoren aufgelöst werden. Dabei treten die Beschleunigungen und die LAGRANGESchen Faktoren linear in den Gleichungen auf. Die  $p + o$  aufgelösten Gleichungen und die  $n$

kinematischen Differentialgleichungen bilden das algorithmische Modell des Starrkörpersystems.

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= g_i(u_1 \dots u_p) & i &= 1 \dots n \\ \dot{u}_i &= g_i(q_1 \dots q_n, u_1 \dots u_p) & i &= n + 1 \dots n + p \\ \lambda_i &= h_i(q_1 \dots q_n, u_1 \dots u_p) & i &= 1 \dots o\end{aligned}$$

Aus den  $n + p$  Gleichungen  $g_i$  sind die zeitlichen Verläufe der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten berechenbar. Die  $o$  Gleichungen  $h_i$  liefern die LAGRANGESchen Faktoren in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten.

### Koordinaten $q_1 \dots q_n$ , keine nichtholonomen Zwänge

Man erhält für die virtuellen Verschiebungen der Schwerpunkte die Ausdrücke

$$\delta \mathbf{r}_i^{S_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial q_j} \delta q_j \quad i = 1 \dots \mu$$

und für die virtuellen Verdrehungen die Ausdrücke

$$\delta \varphi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad i = 1 \dots \mu,$$

wenn die Verschiebungen und die Verdrehungen durch verallgemeinerte Koordinaten  $q_1 \dots q_n$  ausgedrückt werden. Aus diesen Gleichungen und der Gleichung (3) folgt für die virtuelle Arbeit die Gleichung

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial q_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0. \quad (6)$$

In dieser Gleichung sind die  $\mu$  virtuellen Verschiebungen der Schwerpunkte  $\delta \mathbf{r}_i^{S_i}$  und die  $\mu$  virtuellen Verdrehungen  $\delta \varphi_i$  durch die  $n$  virtuellen Verschiebungen  $\delta q_j$  ausgedrückt worden.

Die  $n$  Vorfaktoren

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial q_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \right\} = 0 \quad j = 1 \dots n$$

der Gleichung (6) müssen null sein, falls die  $n$  virtuellen Verschiebungen  $\delta q_j$  unabhängig wählbar sind. Dies ist der Fall, wenn das System keinen nichtholonomen Zwängen unterliegt. Sofern das System holonomen Zwängen ausgesetzt ist, wurden diese schon durch die verallgemeinerten Koordinaten berücksichtigt. Mit den  $n$  Gleichungen kann man die  $n$  verallgemeinerten Koordinaten bestimmen. Die  $n$  Gleichungen stellen das mathematische Modell des Starrkörpersystems dar.

**Koordinaten  $q_1 \dots q_n$ , nichtholonome Zwänge**

Unterliegt das System aber  $s$  nichtholonomen Zwangsbedingungen, dann sind die  $n$  virtuellen Verschiebungen  $\delta q_j$  voneinander abhängig. Die virtuellen Verschiebungen müssen die Zwangsbedingungen in der PFAFFSchen Form

$$\sum_{j=1}^n b_{kj} \delta q_j = 0 \quad k = 1 \dots s$$

erfüllen. Folglich ist es nicht erforderlich, daß die  $n$  Vorfaktoren null sind.

Multipliziert man wieder jede Zwangsbedingung mit einem frei wählbaren LAGRANGESchen Faktor  $\lambda_k$

$$\lambda_k \sum_{j=1}^n b_{kj} \delta q_j = 0 \quad k = 1 \dots s$$

und addiert sie zur Gleichung (6), dann erhält man für die virtuelle Arbeit die Gleichung

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial q_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j + \sum_{k=1}^s \lambda_k \sum_{j=1}^n b_{kj} \delta q_j = 0$$

und nach Umordnung der Ausdrücke die Gleichung

$$\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial q_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \right\} + \sum_{k=1}^s \lambda_k b_{kj} \right] \delta q_j = 0. \quad (7)$$

Wählt man die  $s$  LAGRANGESchen Faktoren so, daß  $s$  Vorfaktoren der Gleichung (7) null werden, müssen die restlichen  $p$  Vorfaktoren null sein, da  $p$  virtuelle Verschiebungen  $\delta q_j$  unabhängig wählbar sind. Es ergeben sich so die  $n$  Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{r}_i^{S_i}}{\partial q_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \right\} + \sum_{k=1}^s \lambda_k b_{kj} = 0 \quad j = 1 \dots n.$$

Mit diesen  $n$  Gleichungen und den  $s$  Zwangsbedingungen sind die  $n$  verallgemeinerten Koordinaten und die  $s$  LAGRANGESchen Faktoren bestimmbar. Das Gleichungssystem aus den  $n$  Gleichungen und den  $s$  Zwangsbedingungen repräsentiert das mathematische Modell des Starrkörpersystems.

Die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen können aus den  $n$  Gleichungen eliminiert werden, indem aus den Zwangsbedingungen und deren zeitliche Ableitungen explizite Gleichungen für die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen berechnet werden. Die  $n$  Gleichungen hängen anschließend nur noch von den verallgemeinerten Koordinaten  $q_1 \dots q_n$ , den verallgemeinerten

Geschwindigkeiten  $u_1 \dots u_p$ , den Beschleunigungen  $\dot{u}_1 \dots \dot{u}_p$  und den LAGRANGESchen Faktoren  $\lambda_1 \dots \lambda_s$  ab.

Man erhält ein algorithmisches Modell durch Auflösen der  $n = p + s$  Gleichungen nach den  $p$  Beschleunigungen und den  $s$  LAGRANGESchen Faktoren. Die Auflösung kann leicht erfolgen, da die Beschleunigungen und die LAGRANGESchen Faktoren linear in den Gleichungen auftreten. Mit den  $p + s$  expliziten Gleichungen und den  $n$  kinematischen Differentialgleichungen hat das algorithmische Modell die Form

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= g_i(u_1 \dots u_p) & i &= 1 \dots n \\ \dot{u}_i &= g_i(q_1 \dots q_n, u_1 \dots u_p) & i &= n + 1 \dots n + p \\ \lambda_i &= h_i(q_1 \dots q_n, u_1 \dots u_p) & i &= 1 \dots s. \end{aligned}$$

Aus den  $n + p$  Gleichungen  $g_i$  sind die zeitlichen Verläufe der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten berechenbar. Mit den  $s$  Gleichungen  $h_i$  lassen sich die LAGRANGESchen Faktoren in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten bestimmen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Prinzip von D'ALEMBERT keine Berücksichtigung der Zwangskräfte und -momente erfordert. Zudem erhält man für holonome Systeme, deren kinematische Größen durch verallgemeinerte Koordinaten ausgedrückt werden, mathematische Modelle mit der kleinsten Anzahl an Gleichungen. In diesem Fall sind keine LAGRANGESchen Faktoren zu berechnen. Da zur Bildung des mathematischen Modells die Zwangskräfte und -momente nicht benötigt werden, kann man auf das Freischneiden verzichten.

### 3.5 Prinzip von Jourdain

Eine weitere Methode zum Aufstellen mathematischer Modelle von Starrkörpersystemen ist das Prinzip von JOURDAIN. In diesem Zusammenhang benötigt man den Begriff der *virtuellen Leistung*. Unter der virtuellen Leistung  $\delta P$  versteht man die Leistung, die die Kräfte und Momente bei konstanter Zeit und bei einer festen Konfiguration des Systems erbringen. Es gilt also:

$$\delta t = 0 \quad \delta x = 0 \quad \delta \dot{x} \neq 0 \quad \delta \ddot{x} \neq 0.$$

Da dies physikalisch unmöglich ist, handelt es sich bei der virtuellen Leistung wie bei der virtuellen Arbeit um eine mentale Größe.

Um einen Ausdruck für die virtuelle Leistung eines Systems zu erhalten, wird zunächst der Impulssatz jedes starren Körpers  $i$  mit der *virtuellen Geschwindigkeit* des Schwerpunktes  $\delta \mathbf{v}_i^{S_i}$  und der Drehimpulssatz jedes starren Körpers  $i$  mit der *virtuellen Winkelgeschwindigkeit* des starren Körpers  $\delta \boldsymbol{\omega}_i$  multipliziert. Die Summe der einzelnen Ausdrücke ergibt einen Ausdruck für die virtuelle Leistung.

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \left( \dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e - \mathbf{F}_i^z \right) \delta \mathbf{v}_i^{S_i} + \left( \dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e} - \mathbf{M}_i^{S_i/z} \right) \delta \boldsymbol{\omega}_i \right\} = 0 \quad (8)$$

Bei einer Bewegung unter konstanter Zeit und unter einer festen Konfiguration ist die Zwangskraft zwischen einem starren Körper und der Umgebung orthogonal zur virtuellen Geschwindigkeit des Kraftangriffspunktes. Ebenso ist ein Zwangsmoment zwischen einem starren Körper und der Umgebung orthogonal zur virtuellen Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers. Betrachtet man eine Zwangskraft oder ein Zwangsmoment zwischen zwei starren Körpern, dann erbringt die Zwangskraft oder das Zwangsmoment zwar an jedem der beiden Körper eine virtuelle Leistung, die sich jedoch in der Summe aufhebt. Deshalb gilt für die virtuelle Leistung der Zwangskräfte und -momente insgesamt:

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \mathbf{F}_i^z \delta \mathbf{v}_i^{S_i} + \mathbf{M}_i^{S_i/z} \delta \boldsymbol{\omega}_i \right\} = 0. \quad (9)$$

Die virtuelle Leistung wird also nicht von den Zwangskräften und -momenten beeinflusst.

Aus dem Ausdruck (8) für die virtuelle Leistung und der Aussage (9) folgt, daß die virtuelle Leistung der Trägheitskräfte und -momente sowie der eingepprägten Kräfte und Momente null ist. Dies ist die Aussage des JOURDAINSchen Prinzips.

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \left( \dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e \right) \delta \mathbf{v}_i^{S_i} + \left( \dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e} \right) \delta \boldsymbol{\omega}_i \right\} = 0 \quad (10)$$

Die Vorgehensweise zum Aufstellen des mathematischen Modells eines Starrkörpersystems hängt von den Geschwindigkeiten ab, in deren Abhängigkeit man die Kinematik formuliert, und von den Zwängen, denen das System unterliegt. Im folgenden werden drei Fälle behandelt:

- Geschwindigkeiten  $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_f$ , keine holonomen und nichtholonomen Zwänge
- Geschwindigkeiten  $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_f$ , holonome und nichtholonome Zwänge
- Geschwindigkeiten  $u_1 \dots u_p$

**Geschwindigkeiten  $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_f$ , keine holonomen und nichtholonomen Zwänge**

Die virtuellen Geschwindigkeiten der Schwerpunkte und die virtuellen Winkelgeschwindigkeiten haben die Form

$$\delta \mathbf{v}_i^{S_i} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{v}_i^{S_i}}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j \quad i = 1 \dots \mu$$

und

$$\delta \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j \quad i = 1 \dots \mu,$$

wenn man die Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten  $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_f$  formuliert. Für die virtuelle Leistung erhält man die Gleichung

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{v}_i^{S_i}}{\partial \dot{x}_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{x}_j} \right\} \delta \dot{x}_j = 0, \quad (11)$$

indem die  $\mu$  Gleichungen für die virtuellen Geschwindigkeiten der Schwerpunkte  $\delta \mathbf{v}_i^{S_i}$  und die  $\mu$  Gleichungen für die virtuellen Winkelgeschwindigkeiten  $\delta \boldsymbol{\omega}_i$  in die Gleichung (10) eingesetzt werden. Die erhaltene Gleichung hängt jetzt von den  $f$  virtuellen Geschwindigkeiten  $\delta \dot{x}_j$  ab.

Falls die  $f$  virtuellen Geschwindigkeiten  $\delta \dot{x}_j$  unabhängig wählbar sind, müssen die  $f$  Vorfaktoren

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{v}_i^{S_i}}{\partial \dot{x}_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{x}_j} \right\} = 0 \quad j = 1 \dots f$$

der Gleichung (11) null sein, um die Gleichung zu erfüllen. Mit diesen  $f$  Gleichungen können die  $f$  Koordinaten bestimmt werden. Die  $f$  Gleichungen stellen das mathematische Modell des Starrkörpersystems dar.

**Geschwindigkeiten  $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_f$ , holonome und nichtholonome Zwänge**

Die  $f$  virtuellen Geschwindigkeiten  $\delta \dot{x}_j$  sind nicht frei wählbar, wenn für das System  $r$  holonome und  $s$  nichtholonome Zwangsbedingungen angebar sind. In einem solchen Fall müssen die virtuellen Geschwindigkeiten die Zwangsbedingungen in der PFAFFSchen Form

$$\sum_{j=1}^f a_{kj} \delta \dot{x}_j = 0 \quad k = 1 \dots o = r + s$$



erfüllen. Folglich ist es nicht erforderlich, daß alle  $f$  Vorfaktoren null sind.

Multipliziert man wieder jede Zwangsbedingung mit einem frei wählbaren LAGRANGESchen Faktor  $\lambda_k$

$$\lambda_k \sum_{j=1}^f a_{kj} \delta \dot{x}_j = 0$$

und addiert diese Gleichungen mit der Gleichung (11), so resultiert daraus für die virtuelle Leistung die Gleichung

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{v}_i^{S_i}}{\partial \dot{x}_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{x}_j} \right\} \delta \dot{x}_j + \sum_{k=1}^o \lambda_k \sum_{j=1}^f a_{kj} \delta \dot{x}_j = 0$$

und nach Umordnung der Ausdrücke die Gleichung

$$\sum_{j=1}^f \left[ \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{v}_i^{S_i}}{\partial \dot{x}_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{x}_j} \right\} + \sum_{k=1}^o \lambda_k a_{kj} \right] \delta \dot{x}_j = 0. \quad (12)$$

Wählt man die  $o$  LAGRANGESchen Faktoren so, daß  $o$  Vorfaktoren der Gleichung (12) null werden, müssen die restlichen  $p$  Vorfaktoren ebenfalls null sein, da  $p$  virtuelle Geschwindigkeiten  $\delta \dot{x}_j$  unabhängig wählbar sind. Insgesamt folgen hieraus die  $f$  Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{v}_i^{S_i}}{\partial \dot{x}_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{x}_j} \right\} + \sum_{k=1}^o \lambda_k a_{kj} = 0 \quad j = 1 \dots f.$$

Mit den  $f$  Gleichungen und den  $o$  Zwangsbedingungen sind die  $f$  Koordinaten und die  $o$  LAGRANGESchen Faktoren bestimmbar. Die  $f$  Gleichungen und die  $o$  Zwangsbedingungen repräsentieren das mathematische Modell des Starrkörpersystems.

Ein algorithmisches Modell erhält man, indem zuerst aus den Zwangsbedingungen und deren zeitliche Ableitungen explizite Gleichungen für die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen berechnet und in die  $f$  Gleichungen eingesetzt werden. Die erhaltenen Gleichungen hängen nur noch von den verallgemeinerten Koordinaten  $q_1 \dots q_n$ , den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $u_1 \dots u_p$ , den Beschleunigungen  $\dot{u}_1 \dots \dot{u}_p$  und den LAGRANGESchen Faktoren  $\lambda_1 \dots \lambda_o$  ab.

Die  $f = p + o$  Gleichungen sind leicht nach den  $p$  Beschleunigungen und den  $o$  LAGRANGESchen Faktoren aufzulösen, da diese Größen linear in den Gleichungen auftreten. Ein vollständiger Satz an Gleichungen ergibt sich aus den  $p + o$  aufgelösten Gleichungen

und den  $n$  kinematischen Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= g_i(u_1 \dots u_p) & i &= 1 \dots n \\ \dot{u}_i &= g_i(q_1 \dots q_n, u_1 \dots u_p) & i &= n+1 \dots n+p \\ \lambda_i &= h_i(q_1 \dots q_n, u_1 \dots u_p) & i &= 1 \dots o\end{aligned}$$

Mit den  $n+p$  Gleichungen  $g_i$  kann man die zeitlichen Verläufe der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten bestimmen. Die  $o$  Gleichungen  $h_i$  liefern die LAGRANGESchen Faktoren in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten.

### Geschwindigkeiten $\dot{u}_1 \dots \dot{u}_p$

Stellt man die Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeiten in Abhängigkeit verallgemeinerter Geschwindigkeiten  $u_1 \dots u_p$  dar, so erhält man für die virtuellen Geschwindigkeiten der Schwerpunkte die Ausdrücke

$$\delta \mathbf{v}_i^{S_i} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial \mathbf{v}_i^{S_i}}{\partial u_j} \delta u_j \quad i = 1 \dots \mu$$

und für die virtuellen Winkelgeschwindigkeiten die Ausdrücke

$$\delta \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^p \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial u_j} \delta u_j \quad i = 1 \dots \mu.$$

Indem diese Gleichungen in die Gleichung (10) eingesetzt werden, folgt daraus für die virtuelle Leistung die Gleichung

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{v}_i^{S_i}}{\partial u_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial u_j} \right\} \delta u_j = 0. \quad (13)$$

Sofern das System holonomen und nichtholonomen Zwängen ausgesetzt ist, wurden die Zwangsbedingungen schon durch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten berücksichtigt. Die  $p$  virtuellen Geschwindigkeiten sind also frei wählbar. Deshalb müssen die  $p$  Vorfaktoren

$$\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \frac{\partial \mathbf{v}_i^{S_i}}{\partial u_j} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial u_j} \right\} = 0 \quad j = 1 \dots p$$

der Gleichung (13) null sein. Mit den  $p$  Gleichungen und den  $n$  kinematischen Differentialgleichungen sind die  $n$  verallgemeinerten Koordinaten und die  $p$  verallgemeinerten

Geschwindigkeiten bestimmbar. Die  $p$  Gleichungen und die  $n$  kinematischen Differentialgleichungen bilden das mathematische Modell des Starrkörpersystems.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Prinzip von JOURDAIN wie das Prinzip von D'ALEMBERT keine Berücksichtigung der Zwangskräfte und -momente erfordert. Weiterhin erhält man für nichtholonome Systeme, deren kinematische Größen durch verallgemeinerte Geschwindigkeiten ausgedrückt werden, mathematische Modelle mit der kleinsten Anzahl an Gleichungen. In diesem Fall sind keine LAGRANGESchen Faktoren zu berechnen. Da man zur Bildung des mathematischen Modells die Zwangskräfte und -momente nicht benötigt, ist das Freischneiden nicht nötig.

### 3.6 Prinzip von Gauß

Als letzte Methode zum Aufstellen mathematischer Modelle von Starrkörpersystemen wird das Prinzip von Gauß behandelt. Das Prinzip von GAUSS sagt aus, daß sich die Beschleunigung einstellt, für die der Zwang

$$Z = \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \left( m_i^{-1} [\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e] \right)^2 + \left( [\Theta_i^{S_i}]^{-1} \cdot [\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}] \right)^2 \right\}$$

ein Minimum annimmt. Beim Prinzip von GAUSS variiert man also die Beschleunigungen bei konstanter Zeit, konstanter Konfiguration und konstanter Bewegung. Es gilt hier also:

$$\delta t = 0 \quad \delta x = 0 \quad \delta \dot{x} = 0 \quad \delta \ddot{x} \neq 0.$$

Der Zwang hängt nur noch von den verallgemeinerten Koordinaten  $q_1 \dots q_n$ , den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $u_1 \dots u_p$  und den Beschleunigungen  $\dot{u}_1 \dots \dot{u}_p$  ab, wenn man in dem Zwang die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen durch Lösen der Zwangsbedingungen und deren zeitliche Ableitungen ersetzt. Die  $p$  Bedingungsgleichungen für ein Minimum des Zwangs und die  $n$  kinematischen Differentialgleichungen sind das mathematische Modell des Starrkörpersystems.

$$\dot{q}_i = g_i(u_1 \dots u_p) \quad i = 1 \dots n$$

$$\min_{\dot{u}_1 \dots \dot{u}_p} Z(q_1 \dots q_n, u_1 \dots u_p, \dot{u}_1 \dots \dot{u}_p)$$

Mit den  $n + p$  Gleichungen sind die  $n$  verallgemeinerten Koordinaten und die  $p$  verallgemeinerten Geschwindigkeiten bestimmbar.

Die Forderung nach einem Minimum in Abhängigkeit der Beschleunigungen führt auf die Variation des Zwangs  $\delta Z$  in Abhängigkeit der  $\mu$  *virtuellen Beschleunigungen* der Schwerpunkte  $\delta \mathbf{a}_i^{S_i}$  und der  $\mu$  *virtuellen Winkelbeschleunigungen*  $\delta \boldsymbol{\alpha}_i$ .

$$\delta Z = 2 \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_i - \mathbf{F}_i^e) \delta \mathbf{a}_i^{S_i} + (\dot{\mathbf{D}}_i^{S_i} - \mathbf{M}_i^{S_i/e}) \delta \boldsymbol{\alpha}_i \right\} = 0$$

Diese Gleichung ist von der Struktur dem Ausdruck für die virtuelle Arbeit und dem Ausdruck für die virtuelle Leistung ähnlich. Mit ihr erhält man ebenfalls, analog zu den Prinzipien von D'ALEMBERT und JOURDAIN, mathematische Modelle für Starrkörpersysteme.

## 4 Softwareunterstützte Modellbildung

Für die Modellbildung steht eine Vielzahl an Software zur Verfügung. Die meiste Software bietet die Möglichkeit, mathematische Modelle auf rechnerinterne Modelle abzubilden. Dagegen ist Software, die die Abbildung von mentalen oder grafischen Modellen auf mathematische oder rechnerinterne Modelle unterstützt, selten. Aus der Menge der Software werden hier folgende Pakete ausgewählt:

- AUTOLEV
- IMECH Mechanik-Bibliothek
- SIMULINK

Die Pakete sind unterschiedlichen Modellbildungsschritten zuzuordnen. AUTOLEV und die IMECH Mechanik-Bibliothek ermöglichen die Abbildung eines mentalen Modells auf ein rechnerinternes Modell. Im Gegensatz dazu unterstützt SIMULINK die Abbildung eines mathematischen Modells auf ein rechnerinternes Modell.

Abgesehen von den unterstützten Modellbildungsschritten unterscheiden sich die Pakete hinsichtlich der Fachgebiete, in denen sie Anwendung finden. Das Paket AUTOLEV ist auf die Modellierung von Starrkörpersystemen beschränkt. Mit der IMECH Mechanik-Bibliothek können sowohl Starrkörpersysteme, als auch hydraulische Systeme modelliert werden. Eine fachübergreifende Modellierung von Systemen erlaubt das Paket SIMULINK.

### 4.1 AUTOLEV

Mit dem Paket AUTOLEV lassen sich mathematische Modelle von Starrkörpersystemen generieren, indem man die Elemente und Beziehungen des mentalen Modells mittels einer mathematischen Sprache beschreibt. Aus der Beschreibung ergibt sich das mathematische Modell durch symbolische Manipulation. Der zugrundeliegende Formalismus, der im wesentlichen auf das Prinzip von JOURDAIN beruht, ist in [5] ausführlich dargestellt.

Aus dem mathematischen Modell ist weiterhin ein rechnerinternes Modell in Form eines FORTRAN oder C Programms erstellbar. Der Quellcode des Programms enthält neben

dem rechnerinternen Modell auch die Lösungsalgorithmen. Nachdem das Programm mit einem FORTRAN oder C Compiler übersetzt wurde, ist es direkt zur Simulation einsetzbar.

Der Ablauf der Modellbildung gliedert sich in vier Teile:

1. Deklaration der Objekte
2. Beschreibung der Kinematik
3. Beschreibung der Dynamik
4. Generierung des rechnerinternen Modells

Diese Einteilung ist nicht zwingend vorgeschrieben, sie führt aber zu übersichtlichen AUTOLEV-Skripten.

### **Deklaration der Objekte**

Namen von Objekten sind Ketten aus alphabetischen und numerischen Zeichen. Dabei muß das erste Zeichen ein alphabetisches Zeichen sein. Für Namen bestimmter Objekte gibt es in AUTOLEV besondere Syntaxformen, die eine effiziente Modellierung bewirken. Auf die einzelnen Syntaxformen wird hier nicht weiter eingegangen. Sie sind in AUTOLEV mit dem Befehl `help syntax_forms` abrufbar.

Grundlegende Objekte in AUTOLEV sind Koordinatensysteme und Punkte. Koordinatensysteme deklariert man mit dem Befehl `frames` und Punkte mit dem Befehl `points`. Der Befehl `frames` führt automatisch drei Einheitsvektoren ein, die die drei Richtungen eines kartesischen Koordinatensystems angeben. Wenn das Koordinatensystem den Namen `a` hat, dann haben die Einheitsvektoren die Namen `a1>`, `a2>` und `a3>`. Das Koordinatensystem, das das Inertialsystem repräsentiert, wird mit dem Befehl `newtonian` deklariert.

Starre Körper deklariert man mit dem Befehl `bodies`. Für den Sonderfall eines starren Körpers, den Massenpunkt, steht ein eigener Befehl zur Verfügung. Die Massenpunkte werden mit dem Befehl `particles` eingeführt. Die Deklaration eines starren Körpers beinhaltet die eines Koordinatensystems mit gleichem Namen und die eines Punktes, dessen Name sich aus dem des starren Körpers und einem angehängten `o` zusammensetzt. Dieser Punkt kennzeichnet den Schwerpunkt des starren Körpers. Weiterhin

beinhaltet die Deklaration eines Massenpunktes die eines Punktes mit gleichem Namen.

Die letzten zu deklarierenden Objekte sind die für zeitabhängige und zeitunabhängige Größen. Das geschieht mit den Befehlen `variables` für zeitabhängige und `constants` für zeitunabhängige Größen.

### Beschreibung der Kinematik

Zur Beschreibung der Kinematik zählt die Formulierung der Zwangsbedingungen. Da AUTOLEV keine allgemeine Möglichkeit bietet, holonome Zwangsbedingungen einzuarbeiten, ist es erforderlich, die Kinematik in Abhängigkeit von verallgemeinerten Koordinaten zu beschreiben. Ist dieses wie bei Schleifen nicht realisierbar, dann muß man mit anderen Hilfsmitteln vorarbeiten.

Im Rahmen der Kinematik muß für jeden Punkt, an dem eine eingeprägte Kraft angreift, die absolute Geschwindigkeit bestimmt werden. Ebenso ist die absolute Winkelgeschwindigkeit jedes Koordinatensystems zu bestimmen, an dem ein eingeprägtes Moment angreift. Für jeden Punkt, der mit einem Massenpunkt oder mit einem Schwerpunkt eines starren Körpers korrespondiert, muß man die absolute Geschwindigkeit und die absolute Beschleunigung angeben. Weiterhin ist für jedes Koordinatensystem, das mit einem starren Körper korrespondiert, die absolute Winkelgeschwindigkeit und die absolute Winkelbeschleunigung anzugeben.

In einem ersten Schritt stellt man die kinematischen Differentiagleichungen<sup>2</sup> auf. Hierzu ist jedes linear unabhängige Gleichungssystem der Form

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(q_1 \dots q_n, t) u_j + b_i(q_1 \dots q_n, t) \quad i = 1 \dots n$$

zulässig. Die Wahl des Gleichungssystems beeinflusst die Komplexität des mathematischen Modells. Es gibt aber keine allgemeinen Regeln zur Auswahl des Gleichungssystems. Das einfachste Gleichungssystem hat die Form

$$\dot{q}_i = u_i \quad i = 1 \dots n.$$

Im nächsten Schritt gibt man für jeden Punkt den Ortsvektor an, und für jedes Koordinatensystem die Transformationsmatrix. Die Angabe der Ortsvektoren erfolgt durch

---

<sup>2</sup>Bei diesem Formalismus werden zunächst  $n$  verallgemeinerte Geschwindigkeiten  $u_1 \dots u_n$  eingeführt.

Vektorgleichungen unter Ausnutzung der Einheitsvektoren. Die Transformationsmatrizen sind direkt eingebbar oder mittels der Befehle `dircos` und `simprot` bestimmbar. Mit dem Befehl `dircos` kann man komplexe Drehungen zwischen Koordinatensystemen handhaben. Der Befehl `simprot` behandelt dagegen nur Drehungen zwischen Koordinatensystemen mit einer gemeinsamen Koordinatenachse.

Die absoluten Geschwindigkeiten der Punkte sind dann durch zeitliche Differentiation der Ortsvektoren relativ zum Inertialsystem berechenbar. Dazu steht der Befehl `dt` bereit. Um aus den Transformationsmatrizen die absoluten Winkelgeschwindigkeiten der Koordinatensysteme zu bestimmen, dient der Befehl `angvel`.

Bei einem nichtholonomen System müssen als nächstes die nichtholonomen Zwangsbedingungen aufgestellt werden. Dazu weist man jede Zwangsbedingung einer Variablen `dependent[i]` zu. Für `i` ist dabei eine Zahl einzusetzen, die die Nummer der Zwangsbedingung angibt. Die Zwangsbedingungen dürfen nur linear von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängen. Der Befehl `constraint` löst dann das lineare Gleichungssystem der Zwangsbedingungen nach den abhängigen verallgemeinerten Geschwindigkeiten auf. Nach welchen verallgemeinerten Geschwindigkeiten aufgelöst werden soll, ist dem Befehl als Argument zu übergeben.

In einem letzten Schritt erhält man dann die absoluten Beschleunigungen und Winkelbeschleunigungen, indem die absoluten Geschwindigkeiten und die absoluten Winkelgeschwindigkeiten der Koordinatensysteme mit dem Befehl `dt` relativ zum Inertialsystem differenziert werden.

### **Beschreibung der Dynamik**

Um die Dynamik zu beschreiben, muß man die eingepprägten Kräfte und Momente sowie die Trägheitsparameter Masse und Massenträgheitsmomente angeben. Die eingepprägten Kräfte werden mit dem Befehl `force` eingegeben. Für die eingepprägten Momente gibt es den Befehl `torque`. Mit dem Befehl `mass` ordnet man den Massenpunkten und den starren Körpern die Massen zu. Analog weist man den starren Körpern mit dem Befehl `inertia` die Massenträgheitsmomente bezüglich des Koordinatensystems zu, das den starren Körpern per Deklaration zugeordnet ist.

Mit den eingegebenen Befehlen ist das mentale Modell des Starrkörpersystems vollständig beschrieben. Die Bewegungsgleichungen generiert man durch den Aufruf der



Befehle `fr` und `frstar`. Der Befehl `fr` führt zur Berechnung der verallgemeinerten eingepprägten Kräfte. Analog führt der Befehl `frstar` zur Berechnung der verallgemeinerten Trägheitskräfte. Die Summe aus beiden ergibt dann die Bewegungsgleichungen. Für die weitere Behandlung der Bewegungsgleichungen ist die Summe der Variablen `zero` zuzuweisen, also `zero=fr()+frstar()`. Der Befehl `kane` überführt die in `zero` enthaltenen Bewegungsgleichungen abschließend in eine bestimmte Form.

Das nun vorliegende mathematische Modell aus den kinematischen Differentialgleichungen und den Bewegungsgleichungen ermöglicht die Berechnung der Bewegung. Das Modell erlaubt aber nicht die Berechnung der Zwangskräfte und -momente. Um ein Modell zu erhalten, mit dem auch Zwangskräfte und -momente berechenbar sind, bietet AUTOLEV ein spezielles Konzept, auf das aber hier nicht näher eingegangen wird.

### Generierung des rechnerinternen Modells

Aus dem mathematischen Modell ist mit dem Befehl `code` ein rechnerinternes Modell in Form eines FORTRAN oder C Programms generierbar. Die Befehle `units`, `input` und `output` ermöglichen eine Beeinflussung der Ein- und Ausgabe des rechnerinternen Modells.

Im Anhang sind kommentierte AUTOLEV-Skripte für den Schubkurbeltrieb als holonomes und die für die Kufe als nichtholonomes System enthalten, um die allgemeine Darstellung der vier Schritte an konkreten mentalen Modellen zu demonstrieren.

## 4.2 IMECH Mechanik-Bibliothek

Mit der IMECH Mechanik-Bibliothek erhält man rechnerinterne Modelle von Starrkörpersystemen, indem der Anwender die Elemente und Beziehungen des mentalen Modells durch C++ Klassen beschreibt. In der Regel erfolgt die Beschreibung innerhalb einer neu abzuleitenden Klasse. Diese Klasse gibt das mentale Modell wieder. Von dieser Klasse erzeugt man in der `main`-Funktion ein Objekt und übergibt es an ausgewählte Gleichungslöser. Mit dem von einem C++ Compiler übersetzten C++ Programm kann man dann Simulationen durchführen.

Die Klassen für Starrkörpersysteme sind von Klassen abgeleitet, die auf ein fachübergreifendes Konzept beruhen. Dieses Konzept faßt die Elemente und Beziehungen als

Übertragungsblöcke auf, die über *Signalleitungen* miteinander verbunden sind. Ein solcher Verbund ist in Abbildung 11 dargestellt.

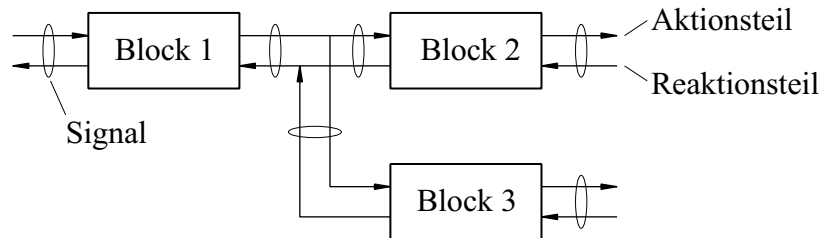


Abbildung 11: Übertragungsblöcke und Signalleitungen

Die Übertragungsblöcke besitzen zwei getrennte Übertragungsmechanismen. Zum einen übertragen sie Teile der Eingangssignale, die *Aktionsteile*, auf die Ausgangssignale. Zum anderen übertragen sie Teile der Ausgangssignale, die *Reaktionsteile*, auf die Eingangssignale. Die erste Übertragungsart wird *Vorwärtsübertragung* (Aktion) genannt. Analog heißt die zweite Übertragungsart *Rückwärtsübertragung* (Reaktion).

Die Aktionsteile bei der Vorwärtsübertragung haben *potentiellen Charakter*. Das heißt, die Aktionsteile mehrerer Eingangssignale haben alle den gleichen Wert wie der Aktionsteil des Ausgangssignals, von dem sie durch eine Verzweigung abstammen. Dagegen haben die Reaktionsteile bei der Rückwärtsübertragung *additiven Charakter*. Das bedeutet, die Werte der Reaktionsteile mehrerer Eingangssignale werden an Verknüpfungsstellen additiv zusammengesetzt und ergeben dann den Wert des Reaktionsteils eines Ausgangssignals.

Die Basisklasse eines Blocks ist `DynamicBlock`. In dieser abstrakten Klasse sind die virtuellen Methoden `act` und `react` deklariert, die die Vorwärts- und Rückwärtsübertragung ausführen. Eine weitere elementare Klasse ist die Klasse `DynamicSystem`. Sie kann mehrere von `DynamicBlock` abgeleitete Klassen beinhalten. Durch Vererbung dieser Klassen und durch Einführung von Klassen für Signale kann man Klassen für verschiedene Fachgebiete erhalten. Dieses ist bereits für Starrkörpersysteme und hydraulische Systeme durchgeführt worden. In dieser Arbeit sind nur die Klassen für die Modellierung von Starrkörpersystemen interessant. Eine umfassende Darstellung des Konzeptes ist in [2] und [1] zu finden.

Der Ablauf der Modellbildung von Starrkörpersystemen gliedert sich in drei Teile:

1. Deklariert der Objekte

2. Beschreibung der Struktur
3. Beschreibung der Kräfte und Momente

Die drei Teile können auch begrenzt gemischt werden. Die Einteilung führt zu einer übersichtlichen Beschreibung und zum Teil auch zu einer effizienteren Lösung.

Die Objekte, die zum Aufbau der Struktur dienen, bestimmen zum einen die Kinematik der Struktur, zum anderen an welchen Stellen Zwangskräfte und -momente in der Struktur auftreten, also einen Teil der Dynamik. Mit den Objekten für die Kräfte und -momente beschreibt man den Rest der Dynamik. Zu diesen Kräften und Momenten gehören sowohl die eingepprägten Kräfte und Momente, als auch die Trägheitskräfte und -momente.

### **Deklaration der Objekte**

Die Deklaration der Objekte erfolgt entsprechend der C++ Syntax. Erstellt man eine eigene von `DynamicSystem` abgeleitete Klasse für das Modell, dann erfolgt die Deklaration im Deklarationsteil der Klasse. Die Initialisierung findet in diesem Fall bei der Definition des Konstruktors der Klasse statt. Es ist jedoch auch möglich, ohne eine eigene Klasse ein Modell zu bilden. In diesem Fall erfolgt die Initialisierung direkt bei der Deklaration.

### **Beschreibung der Struktur**

Die Struktur wird durch Gelenke und Verbindungen zwischen den Gelenken (Links) beschrieben. Ein Gelenk legt fest, wie zwei Koordinatensysteme gegeneinander verschiebbar oder verdrehbar sind. Ein Link legt fest, wie zwei Koordinatensysteme fest gegeneinander verdreht oder verschoben sind. Eine Klasse für ein Gelenk oder ein Link enthält also immer zwei Koordinatensysteme. Das Ausgangskordinatensystem hat den Elementnamen `from` und das Zielkoordinatensystem den Elementnamen `to`.

Die Klasse für ein Koordinatensystem heißt `Frame`. Es gibt drei spezielle Koordinatensysteme mit den Namen `Frame_gx`, `Frame_gy` und `Frame_gz`. Das Koordinatensystem `Frame_gx` hat eine eingepprägte Erdbeschleunigung in Richtung der x-Achse. Analog haben die anderen beiden Koordinatensysteme eine eingepprägte Erdbeschleunigung in

Richtung der  $y$ - beziehungsweise  $z$ -Achse. Für die Richtung einer Koordinatenachse gibt es die Klasse `FrameAxis`. Den drei Richtungen sind Zahlen zugeordnet: Der  $x$ -Richtung ist die Zahl null, der  $y$ -Richtung ist die Zahl eins, und der  $z$ -Richtung ist die Zahl zwei zugeordnet.

Für die Gelenke und Links gibt es eine Reihe fertiger Klassen, die nachfolgend kurz erklärt werden.

*Links:*

1. `RigidPrismaticLink`: Bei diesem Link haben die beiden Koordinatensysteme die gleiche Orientierung. Das Zielkoordinatensystem ist jedoch fest gegenüber dem Ausgangskordinatensystem entlang einer Achse des Ausgangskordinatensystems verschoben. Dem Konstruktor der Klasse sind die Achse und die Verschiebung zu übergeben.
2. `RigidTranslationLink`: Gegenüber dem `RigidPrismaticLink` ist das Zielkoordinatensystem von diesem Link entlang aller drei Achsen des Ausgangskordinatensystems verschoben. Dem Konstruktor der Klasse ist die Verschiebung zu übergeben.
3. `RigidRevoluteLink`: Die beiden Koordinatensysteme sind nicht gegeneinander verschoben, sondern haben eine gemeinsame Achse, um die sie fest gegeneinander verdreht sind. Dem Konstruktor sind die gemeinsame Achse und der Verdrehwinkel zu übergeben.

*Gelenke:*

1. `PrismaticJoint`: Dieses Gelenk ist ein Schubgelenk. Die beiden Koordinatensysteme haben die gleiche Orientierung. Das Zielkoordinatensystem ist jedoch variabel gegenüber dem Ausgangskordinatensystem entlang einer Achse des Ausgangskordinatensystems verschiebbar. Dem Konstruktor der Klasse ist die Achse zu übergeben. Das Gelenk kann keine Kraft entlang der Schubachse übertragen.
2. `RevoluteJoint`: Hierbei handelt es sich um ein einfaches Drehgelenk. Die beiden Koordinatensysteme sind nicht gegeneinander verschoben, sondern haben eine gemeinsame Achse, um die sie variabel gegeneinander verdrehbar sind. Dem

Konstruktor ist die gemeinsame Achse zu übergeben. Dieses Gelenk kann kein Moment um die Drehachse übertragen.

3. **UniversalJoint**: Dieses ist ein Kardangelenke, das sich aus zwei Drehgelenken mit sich rechtwinkelig schneidenden Drehachsen zusammensetzt. Dem Konstruktor sind die beiden Drehachsen zu übergeben. Entsprechend den beiden Drehgelenken kann dieses Gelenk keine Momente um die beiden Drehachsen übertragen.
4. **SphericalJoint**: Dieses Gelenk ist ein Kugelgelenk. Es setzt sich aus drei Drehgelenken zusammen, deren Achsen sich paarweise rechtwinkelig alle in einem Punkt schneiden. Dieses Gelenk kann keine Momente übertragen.

Die Klassen der Gelenke beinhalten ein Element mit dem Namen **state**, das wiederum ein Element **q** für die Gelenkkoordinate, ein Element **v** für die Geschwindigkeit und ein Element **a** für die Beschleunigung beinhaltet. Weiterhin hat das Element **state** noch Elemente für die Kraft **f** und das Moment **t** im Gelenk.

Die Gelenke und Links setzt man zu einer Struktur zusammen, indem dem Konstruktor des neuen Gelenks oder Links das Koordinatensystem übergeben wird, das mit dem Ausgangskordinatensystem des neuen Gelenks oder Links zusammenfällt. Da das zu übergebende Koordinatensystem meistens das Zielkoordinatensystem eines anderen Gelenks oder Links ist, kann man auch alternativ das Gelenk oder den Link übergeben, zu dem das Zielkoordinatensystem gehört. Ein Gelenk oder Link kann immer nur einen Vorgänger haben. Folglich sind nur offene Ketten aus Gelenken und Links modellierbar.

Um geschlossene Ketten zu modellieren, stehen besondere Klassen bereit. Eine solche Klasse drückt holonome Zwangsbedingungen zwischen den zur Kette gehörenden Gelenkwinkeln aus. In der IMECH Mechanik-Bibliothek gibt es mehrere Möglichkeiten, geschlossene Ketten zu modellieren.

Im einfachsten Fall wird für das Gelenk, das den Zwang erzeugt, ein Ersatz eingebaut, der zwei Vorgänger hat. Eine solche Klasse ist zum Beispiel **SphericalConstraint**, die ein Ersatz für die Klasse **SphericalJoint** ist. Ebenso wären Klassen wie **UniversalConstraint**, **RevoluteConstraint** oder **PrismaticConstraint** denkbar. Diesen Klassen müssen die in Beziehung zu setzenden Zielkoordinatensysteme übergeben werden.

Es ist empfehlenswert, in die Struktur auch den Gleichungslöser für den Zwang einzubauen, da der Zwang dann später nicht mehr zu berücksichtigen ist. Eine Klasse

hierfür ist `C05ncfConstraintSolver`. Dem Löser ist die Kette zu übergeben, die den Zwang festlegt, und die, in der nur die Gelenke enthalten sind, dessen Gelenkkoordinaten von dem Zwang bestimmt werden. Die Kennung `C05ncf` gibt das Verfahren aus der NAG-Bibliothek an, das der Gleichungslöser verwendet.

Eine weitere Möglichkeit geschlossene Ketten zu modellieren, ist das „Schneiden“ einer geschlossenen Kette an charakteristischen Gelenkpaaren. Die Klasse `SphericalUniversalPairRevoluteSolverSystem` kann man bei Schnitten durch ein Kugel- und ein Kardangelenk anwenden. Dieser Klasse sind die beiden Teilketten zu übergeben, wobei in einer ein Drehgelenk enthalten sein muß, dessen Gelenkkoordinate von dem Zwang bestimmt wird.

Da für diese Kombination eine geschlossene Lösung existiert, sind mit dieser Klasse Zwänge sehr effizient modellierbar. Unter Umständen sollte die Kette so kinematisch gleichwertig umgestaltet werden, daß diese Klasse anwendbar ist. Dabei beeinflusst man jedoch auch die Kraftübertragung in der Kette.

Neben holonomen Zwangsbedingungen sind auch nichtholonome Zwangsbedingungen modellierbar. Ein Beispiel hierfür ist die Klasse `SkidConstraint`. Der Klasse übergibt man einen Richtungsvektor und ein Koordinatensystem. Die Klasse führt dazu, daß das zum Richtungsvektor gehörende Koordinatensystem sich nicht relativ zum angegebenen Koordinatensystem in Richtung des Richtungsvektors bewegt. Das ist ein Zwang, der ein Gleiten in eine Richtung verhindert.

### **Beschreibung der Kräfte und Momente**

Die Basisklasse für die Kräfte und Momente ist die Klasse `FrameForce`. Mit dieser Klasse kann man direkt eine Kraft und ein Moment auf ein Koordinatensystem aufbringen. Dazu ist dem Konstruktor zum einen das Koordinatensystem zu übergeben, auf das die Kraft und das Moment wirken sollen. Auch hier kann man alternativ ein Gelenk oder Link übergeben, von dem dann das Zielkoordinatensystem verwendet wird. Zum anderen sind Kraft und Moment zu übergeben.

Indem man von der Klasse `FrameForce` neue Klassen ableitet, sind Klassen erzeugbar, die zum Beispiel Federn oder Dämpfer darstellen. Die von `FrameForce` abgeleitete Klasse `FrameMass` ist so eine Klasse. Mit ihr können auf die Struktur Trägheitskräfte und -momente aufgebracht werden, die den Einfluß von Massenpunkten oder starren

Körpern wiedergeben. Für die Kraft und das Moment sind dem Konstruktor jetzt Schwerpunktkoordinaten, Masse und Massenträgheitsmomente zu übergeben.

Im Anhang sind kommentierte Modelle für den Schubkurbeltrieb als holonomes und für die Kufe als nichtholonomes System enthalten, um die allgemeine Darstellung der drei Schritte an konkreten mentalen Modellen zu demonstrieren.

### 4.3 SIMULINK

Mit dem Paket SIMULINK erhält man ein rechnerinternes Modell eines Starrkörpersystems, indem man das mathematische Modell in Form von Blöcken zu einem Blockschaltbild zusammensetzt. Dazu gibt es in SIMULINK eine Vielzahl an Blöcken, die eine flexible Modellierung erlauben. So gibt es zum Beispiel Blöcke mit linearem und nichtlinearem Übertragungsverhalten, Blöcke, die im Zeit- und im Laplacebereich definiert sind, oder Blöcke, die die Interaktion mit MATLAB ermöglichen. Die letzte Art von Blöcken gestattet es, Teile des mathematischen Modells mittels MATLAB-Funktionen zu beschreiben. Die verschiedenen Blöcke sind alle untereinander kombinierbar. Wenn das Blockschaltbild eingegeben ist, kann man mit SIMULINK oder auch direkt mit MATLAB Simulationen an ihm durchführen.

Da die Blöcke Ein- und Ausgänge haben, muß man jede Gleichung des mathematischen Modells zunächst nach einer Variablen auflösen. Man kann jede Gleichungen als einen Block betrachten, bei dem der Ausgang die Variable ist, nach der aufgelöst wurde. Die anderen Variablen sind die Eingänge des Blocks. Aus den Blöcken ist genau dann ein vollständiges Blockschaltbild erstellbar, wenn die Eingänge der einzelnen Blöcke die Eingänge des Gesamtsystems oder die Ausgänge anderer Blöcke sind.

Aus der Vorgehensweise wird deutlich, daß nicht jede aufgelöste Form der Gleichungen zu einem vollständigen Blockschaltbild führt. Zudem hängt es davon ab, inwieweit die Gleichungen überhaupt auflösbar sind. Es gibt aber zwei Regeln, die das Auflösen der Gleichungen erleichtern:

- Zu jeder Größe, die mit dem mathematischen Modell bestimmt werden soll, gibt es mindestens eine Gleichung, in der diese Größe auftritt. In dieser Gleichung kann man die Größe als Ausgangsgröße betrachten.

- Tritt eine Größe, die mit dem mathematischen Modell bestimmt werden soll, nur in einer Gleichung auf, dann ist in dieser Gleichung die Größe als Ausgangsgröße zu betrachten.

In den mathematischen Modellen von Starrkörpersystemen sind die zu bestimmenden Größen die unabhängigen Beschleunigungen und die Zwangsgrößen oder die LAGRANGESchen Faktoren. Da diese Größen linear in den Gleichungen auftreten, sind die Gleichungen nach diesen Größen auflösbar. Ein Problem können jedoch die Zwangsbedingungen darstellen, falls die holonomen Zwangsbedingungen nicht nach den abhängigen Koordinaten oder die nichtholonomen Zwangsbedingungen nicht nach den abhängigen Geschwindigkeiten auflösbar sind.

Im nachfolgenden wird eine Vorgehensweise beschrieben, die ein mathematisches Modell eines Starrkörpersystems in ein Blockschaltbild überführt. Die Vorgehensweise setzt voraus, daß die Zwangsbedingungen auflösbar sind. Die Bildung des Blockschaltbildes erfolgt in drei Schritten:

1. Bildung eines Blocks für die Zwangsbedingungen
2. Bildung von Blöcken, die die unabhängigen Beschleunigungen als Ausgänge haben
3. Bildung von Blöcken, die die Zwangsgrößen oder die LAGRANGESchen Faktoren als Ausgänge haben

Der erste Block hat als Eingänge die unabhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die Ausgänge sind die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die Gleichungen, die der Block darstellt, sind die Zwangsbedingungen und deren zeitliche Ableitungen. Mit ihnen sind gerade die abhängigen Größen aus den unabhängigen Größen bestimmbar. Dazu muß zum einen festgelegt werden, welche Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen unabhängig und welche abhängig sein sollen. Zum anderen sind die Gleichungen unter Berücksichtigung der angegebenen Regeln aufzulösen.

Aus den Bewegungsgleichungen sind jetzt, unter Berücksichtigung der angegebenen Regeln, Gleichungen für die unabhängigen Beschleunigungen zu suchen und nach ihnen aufzulösen. Führt man für jede dieser Gleichungen wieder einen Block ein, dann sind



deren Ausgangsgrößen die unabhängigen Beschleunigungen. Die Eingangsgrößen sind die Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sowie die Zwangsgrößen oder die LAGRANGESchen Faktoren.

Die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind die Ausgangsgrößen des Blocks für die Zwangsbedingungen. Die unabhängigen Koordinaten und Geschwindigkeiten erhält man, indem die unabhängigen Beschleunigungen durch Integrationsblöcke auf die unabhängigen Geschwindigkeiten und die unabhängigen Geschwindigkeiten ebenfalls durch Integrationsblöcke auf die unabhängigen Koordinaten übertragen werden. Damit stehen jetzt auch alle Eingänge für den Block der Zwangsbedingungen bereit.

Als letztes sind die restlichen Gleichungen der Bewegungsgleichungen, wieder unter Berücksichtigung der Regeln, nach den Zwangsgrößen oder den LAGRANGESchen Faktoren aufzulösen. Führt man auch hier für jede Gleichung einen Block ein, dann sind die Ausgangsgrößen die Zwangsgrößen oder die LAGRANGESchen Faktoren. Die Eingangsgrößen sind die Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sowie die Zwangsgrößen oder die LAGRANGESchen Faktoren.

Faßt man die Blöcke der Bewegungsgleichungen, die zu einem starren Körper gehören, zu einen neuen Block zusammen, dann besteht das zusammengefaßte Blockschaltbild aus dem Block der Zwangsbedingungen und den einzelnen Blöcken für die starren Körper. Ein solches Blockschaltbild gibt Aufschluß über das Zusammenwirken der starren Körper, da die Struktur des Systems noch erhalten ist.

Durch die verschiedenen Rückführungen treten algebraische Schleifen auf. Sie haben ihren Ursprung in den Abhängigkeiten der Beschleunigungen. Da diese Abhängigkeiten linear sind, handelt es sich um lineare algebraische Schleifen. In SIMULINK sind diese Schleifen nicht lösbar. Eine Abhilfe dieses Problems stellt der Block **Memory** dar, der in eine solche Schleife einbaubar ist. Dieser Block setzt den Wert des Ausgangs zum Zeitpunkt  $t_i$  auf den Wert des Eingangs zum vorherigen Zeitpunkt  $t_{i-1}$ .

Die Schleifenlösung mit dem Block von SIMULINK erfordert einen Startwert. Einen korrekten Startwert kann man in der Regel nur durch die Lösung des mathematischen Modells zum Anfangszeitpunkt erlangen. Verwendet man einen Näherungswert, dann ist besonders bei nichtlinearen Systemen mit falschen Ergebnissen der Simulationen zu rechnen. Eine echte Abhilfe ist nur die Elimination der Schleifen, bevor man das Blockschaltbild eingibt. Dabei geht jedoch die Struktur verloren.

Im Anhang ist das Vorgehen für das Blockschaltbild des Schubkurbeltriebes und für das Blockschaltbild der Kufe beschrieben.

## 5 Resümee und Ausblick

Die Bildung eines Modells erlaubt es, Experimente an einem System zu umgehen, indem man am Modell Simulationen durchführt. Bei der Interpretation der Ergebnisse ist jedoch zu berücksichtigen, daß das Modell nur ein begrenztes Abbild des Systems ist. Die Abbildung erfolgt im Zusammenhang mit einer Frage bezüglich des Systems, so daß das Modell nur die Eigenschaften des Systems beinhaltet, die notwendig sind, um die Frage hinreichend beantworten zu können.

Der Weg zum rechnerinternen Modell führt über verschiedene Zwischenmodelle, bei denen der Informationsgehalt sinkt und die Abstraktion steigt. Ausgehend von einem mentalen Modell, das nur von einem Experten gebildet werden kann, ist die Wunschvorstellung, das mentale Modell in Form eines fachbezogenen grafischen Modells in den Computer einzugeben. Werkzeuge zur Unterstützung des Modellbildungsprozesses sollten hieraus über ein mathematisches und ein algorithmisches Modell ein rechnerinternes Modell erzeugen.

Überträgt man die Einteilung eines Systems in Elemente und Beziehungen auf Starrkörpersysteme, dann sind die Elemente die starren Körper und die Beziehungen die Kräfte und Momente, über die die starren Körper untereinander oder mit der Umgebung in Beziehung stehen. Das mathematische Modell eines Starrkörpersystems besteht aus den Zwangsbedingungen und den Bewegungsgleichungen. Die Zwangsbedingungen beschreiben die Beziehungen des Systems; die Bewegungsgleichungen beschreiben die Elemente.

Bedingt durch die unterschiedlichen Verfahren zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen erhält man nicht aus allen mathematischen Modellen die gleichen Informationen. Das bezieht sich insbesondere auf die Zwangsgrößen, die bei den Prinzipien der analytischen Mechanik umgangen werden. Das Einführen der LAGRANGESchen Faktoren ist nur eine Abhilfe, falls Zwangsbedingungen nicht auflösbar sind.

Die Ableitung des mathematischen Modells innerhalb einer Software ist unkritisch, da die Beschreibung der Elemente und Beziehungen nach einem festen Schema abläuft. Im Gegensatz dazu ist die Generierung eines algorithmischen Modells kritisch. Um ein algorithmisches Modell zu erhalten, ist im allgemeinen ein differential-algebraisches Gleichungssystem zu manipulieren. Hier ist besonders die Verarbeitung der Zwangsbedingungen schwierig.

Anzustreben ist es, nur die Struktur eines Systems eingeben zu müssen. Wie die Größen zwischen den Elementen gerichtet sind, sollte die Software ermitteln. Die ausgewählte Software zeigt, daß die Bildung eines algorithmischen und damit auch eines rechnerinternen Modells problematisch ist. Hier kann eine Analyse des eingegebenen Modells helfen, besser verarbeitbare Strukturen zu finden. In diesem Bereich kann besonders eine Kombination aus Informatik- und Maschinenbauwissen zu besseren Resultaten führen.

Ein Mangel der Software ist die fehlende Unterstützung bei der Simulation. Die Software sollte erkennen, ob die Lösungsalgorithmen überhaupt auf das rechnerinterne Modell anwendbar sind. So dürfen numerische Integratoren nur auf stabile Systeme angewendet werden. Zudem ist es wünschenswert, neben der statischen und dynamischen Simulation auch Simulationen durchführen zu können, die Aussagen über die Stabilität im Zustandsraum geben.

Eine weitere Hilfe der Software wäre es, die mentalen Modelle in Form von grafischen Modellen einzugeben. Gegenüber den textuellen Methoden haben grafische Methoden den Vorteil, daß die Modelle schneller überschaubar sind. Zudem könnte man die Grafik dazu benutzen, die Bewegung des Systems zu animieren. Solche Animationen bieten einen schnelleren Überblick über die Bewegung als einfache Plots.

An den Fallbeispielen wird deutlich, daß textuelle Beschreibungen wie bei AUTOLEV oder der IMECH Mechanik-Bibliothek durchaus eine einfache Beschreibung von Starrkörpersystemen gestatten. Die Einschränkungen von AUTOLEV hinsichtlich der Zwangsbedingungen führen zu mathematischen Modellen, die leicht in algorithmische Modelle überführbar sind. Dagegen enthält die IMECH Mechanik-Bibliothek verschiedene Möglichkeiten, geschlossene Ketten zu modellieren, so daß man unter Umständen erst durch eine Umkonfiguration von Gelenken effizient zu lösende Strukturen erhält. Auch bei dem Einsatz von SIMULINK zeigt sich die Schwierigkeit, ein algorithmisches Modell zu erhalten.

## A Fallbeispiel Schubkurbeltrieb

### A.1 Kinematik

Die Konfiguration des Schubkurbeltriebes wird durch die kartesischen Koordinaten der Schwerpunkte und durch die EULER-Winkel der starren Körper beschrieben. Die kartesischen Koordinaten beziehen sich auf den Lagerpunkt  $A$  und die EULER-Winkel auf das Inertialsystem  $N$ . Die Bezeichnungen entsprechen denen der Abbildung 7.

#### Kinematik des freien Lenkers

- kartesischen Koordinaten:  $x_L, y_L, z_L$
- EULER-Winkel:  $\phi_L, \theta_L, \psi_L$

Ortsvektor  $\mathbf{r}^{SL}$ , absolute Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^{SL}$  und absolute Beschleunigung  $\mathbf{a}^{SL}$  des Lenkerschwerpunktes:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{SL} &= x_L \mathbf{n}_1 + y_L \mathbf{n}_2 + z_L \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{v}^{SL} &= \dot{x}_L \mathbf{n}_1 + \dot{y}_L \mathbf{n}_2 + \dot{z}_L \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{a}^{SL} &= \ddot{x}_L \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_L \mathbf{n}_2 + \ddot{z}_L \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

Einheitsvektoren  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$  und  $\mathbf{l}_3$  des körperfesten Lenkerkoordinatensystems:

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_1 &= (\cos \phi_L \cos \psi_L - \sin \phi_L \cos \theta_L \sin \psi_L) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (\sin \phi_L \cos \psi_L + \cos \phi_L \cos \theta_L \sin \psi_L) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + \sin \theta_L \sin \psi_L \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{l}_2 &= (-\cos \phi_L \sin \psi_L - \sin \phi_L \cos \theta_L \cos \psi_L) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (-\sin \phi_L \sin \psi_L + \cos \phi_L \cos \theta_L \cos \psi_L) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + \sin \theta_L \cos \psi_L \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{l}_3 &= \sin \phi_L \sin \theta_L \mathbf{n}_1 - \cos \phi_L \sin \theta_L \mathbf{n}_2 + \cos \theta_L \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

absolute Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}^L$  des Lenkers:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^L &= (\dot{\theta}_L \cos \phi_L + \dot{\psi}_L \sin \theta_L \sin \phi_L) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (\dot{\theta}_L \sin \phi_L - \dot{\psi}_L \sin \theta_L \cos \phi_L) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + (\dot{\phi}_L + \dot{\psi}_L \cos \theta_L) \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

absolute Winkelbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}^L$  des Lenkers:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^L &= (\ddot{\theta}_L \cos \phi_L - \dot{\theta}_L \dot{\phi}_L \sin \phi_L) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\ddot{\psi}_L \sin \theta_L \sin \phi_L + \dot{\psi}_L \dot{\theta}_L \cos \theta_L \sin \phi_L + \dot{\psi}_L \dot{\phi}_L \sin \theta_L \cos \phi_L) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\ddot{\theta}_L \sin \phi_L + \dot{\theta}_L \dot{\phi}_L \cos \phi_L) \mathbf{n}_2 \\ &+ (-\ddot{\psi}_L \sin \theta_L \cos \phi_L - \dot{\psi}_L \dot{\theta}_L \cos \theta_L \cos \phi_L + \dot{\psi}_L \dot{\phi}_L \sin \theta_L \sin \phi_L) \mathbf{n}_2 \\ &+ (\ddot{\phi}_L + \ddot{\psi}_L \cos \theta_L - \dot{\psi}_L \dot{\theta}_L \sin \theta_L) \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

### Kinematik des freien Pleuels

- kartesischen Koordinaten:  $x_P, y_P, z_P$
- EULER-Winkel:  $\phi_P, \theta_P, \psi_P$

Ortsvektor  $\mathbf{r}^{SP}$ , absolute Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^{SP}$  und absolute Beschleunigung  $\mathbf{a}^{SP}$  des Pleuelschwerpunktes:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{SP} &= x_P \mathbf{n}_1 + y_P \mathbf{n}_2 + z_P \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{v}^{SP} &= \dot{x}_P \mathbf{n}_1 + \dot{y}_P \mathbf{n}_2 + \dot{z}_P \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{a}^{SP} &= \ddot{x}_P \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_P \mathbf{n}_2 + \ddot{z}_P \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

Einheitsvektoren  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  und  $\mathbf{p}_3$  des körperfesten Pleuelkoordinatensystems:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= (\cos \phi_P \cos \psi_P - \sin \phi_P \cos \theta_P \sin \psi_P) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\sin \phi_P \cos \psi_P + \cos \phi_P \cos \theta_P \sin \psi_P) \mathbf{n}_2 \\ &\quad \sin \theta_P \sin \psi_P \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{p}_2 &= (-\cos \phi_P \sin \psi_P - \sin \phi_P \cos \theta_P \cos \psi_P) \mathbf{n}_1 \\ &+ (-\sin \phi_P \sin \psi_P + \cos \phi_P \cos \theta_P \cos \psi_P) \mathbf{n}_2 \\ &\quad \sin \theta_P \cos \psi_P \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{p}_3 &= \sin \phi_P \sin \theta_P \mathbf{n}_1 - \cos \phi_P \sin \theta_P \mathbf{n}_2 + \cos \theta_P \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

absolute Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}^P$  des Pleuels:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^P &= (\dot{\theta}_P \cos \phi_P + \dot{\psi}_P \sin \theta_P \sin \phi_P) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\dot{\theta}_P \sin \phi_P - \dot{\psi}_P \sin \theta_P \cos \phi_P) \mathbf{n}_2 \\ &+ (\dot{\phi}_P + \dot{\psi}_P \cos \theta_P) \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

absolute Winkelbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}^P$  des Pleuels:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^P &= (\ddot{\theta}_P \cos \phi_P - \dot{\theta}_P \dot{\phi}_P \sin \phi_P) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\ddot{\psi}_P \sin \theta_P \sin \phi_P + \dot{\psi}_P \dot{\theta}_P \cos \theta_P \sin \phi_P + \dot{\psi}_P \dot{\phi}_P \sin \theta_P \cos \phi_P) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\ddot{\theta}_P \sin \phi_P + \dot{\theta}_P \dot{\phi}_P \cos \phi_P) \mathbf{n}_2 \\ &+ (-\ddot{\psi}_P \sin \theta_P \cos \phi_P - \dot{\psi}_P \dot{\theta}_P \cos \theta_P \cos \phi_P + \dot{\psi}_P \dot{\phi}_P \sin \theta_P \sin \phi_P) \mathbf{n}_2 \\ &+ (\ddot{\phi}_P + \ddot{\psi}_P \cos \theta_P - \dot{\psi}_P \dot{\theta}_P \sin \theta_P) \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

### Kinematik des freien Kolbens

- kartesischen Koordinaten:  $x_K, y_K, z_K$
- EULER-Winkel:  $\phi_K, \theta_K, \psi_K$

Ortsvektor  $\mathbf{r}^{SK}$ , absolute Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^{SK}$  und absolute Beschleunigung  $\mathbf{a}^{SK}$  des Kolbenschwerpunktes:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{SK} &= x_K \mathbf{n}_1 + y_K \mathbf{n}_2 + z_K \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{v}^{SK} &= \dot{x}_K \mathbf{n}_1 + \dot{y}_K \mathbf{n}_2 + \dot{z}_K \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{a}^{SK} &= \ddot{x}_K \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_K \mathbf{n}_2 + \ddot{z}_K \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

Einheitsvektoren  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  und  $\mathbf{k}_3$  des körperfesten Kolbenkoordinatensystems:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= (\cos \phi_K \cos \psi_K - \sin \phi_K \cos \theta_K \sin \psi_K) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\sin \phi_K \cos \psi_K + \cos \phi_K \cos \theta_K \sin \psi_K) \mathbf{n}_2 \\ &+ \sin \theta_K \sin \psi_K \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{k}_2 &= (-\cos \phi_K \sin \psi_K - \sin \phi_K \cos \theta_K \cos \psi_K) \mathbf{n}_1 \\ &+ (-\sin \phi_K \sin \psi_K + \cos \phi_K \cos \theta_K \cos \psi_K) \mathbf{n}_2 \\ &+ \sin \theta_K \cos \psi_K \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{k}_3 &= \sin \phi_K \sin \theta_K \mathbf{n}_1 - \cos \phi_K \sin \theta_K \mathbf{n}_2 + \cos \theta_K \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

absolute Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}^K$  des Kolbens:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^K &= (\dot{\theta}_K \cos \phi_K + \dot{\psi}_K \sin \theta_K \sin \phi_K) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\dot{\theta}_K \sin \phi_K - \dot{\psi}_K \sin \theta_K \cos \phi_K) \mathbf{n}_2 \\ &+ (\dot{\phi}_K + \dot{\psi}_K \cos \theta_K) \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

absolute Winkelbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}^K$  des Kolbens:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^K &= (\ddot{\theta}_K \cos \phi_K - \dot{\theta}_K \dot{\phi}_K \sin \phi_K) \mathbf{n}_1 \\
&+ (\ddot{\psi}_K \sin \theta_K \sin \phi_K + \dot{\psi}_K \dot{\theta}_K \cos \theta_K \sin \phi_K + \dot{\psi}_K \dot{\phi}_K \sin \theta_K \cos \phi_K) \mathbf{n}_1 \\
&+ (\ddot{\theta}_K \sin \phi_K + \dot{\theta}_K \dot{\phi}_K \cos \phi_K) \mathbf{n}_2 \\
&+ (-\ddot{\psi}_K \sin \theta_K \cos \phi_K - \dot{\psi}_K \dot{\theta}_K \cos \theta_K \cos \phi_K + \dot{\psi}_K \dot{\phi}_K \sin \theta_K \sin \phi_K) \mathbf{n}_2 \\
&+ (\ddot{\phi}_K + \ddot{\psi}_K \cos \theta_K - \dot{\psi}_K \dot{\theta}_K \sin \theta_K) \mathbf{n}_3
\end{aligned}$$

### Zwangsbedingungen des Gelenks A

Das Gelenk A läßt nur eine einfache Drehung des Lenkers bezüglich des Inertialsystems zu. Weiterhin ruht ein Endpunkt des Lenkers.

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{n}_3 &= 0 \\
\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{n}_3 &= 0 \\
\mathbf{r}^{S_L} - \frac{1}{2} l_L \mathbf{l}_1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \sin \theta_L \sin \psi_L \\
0 &= \sin \theta_L \cos \psi_L \\
0 &= x_L - \frac{1}{2} l_L (\cos \phi_L \cos \psi_L - \sin \phi_L \cos \theta_L \sin \psi_L) \\
0 &= y_L - \frac{1}{2} l_L (\sin \phi_L \cos \psi_L + \cos \phi_L \cos \theta_L \sin \psi_L) \\
0 &= z_L - \frac{1}{2} l_L \sin \theta_L \sin \psi_L
\end{aligned}$$

### Zwangsbedingungen des Gelenks B

Das Gelenk B läßt nur eine einfache Drehung des Pleuels bezüglich des Lenkers zu. Weiterhin ist ein Endpunkt des Lenkers mit einem Endpunkt des Pleuels verbunden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{l}_3 &= 0 \\
\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{l}_3 &= 0 \\
\mathbf{r}^{S_P} - \frac{1}{2} l_P \mathbf{p}_1 - \mathbf{r}^{S_L} - \frac{1}{2} l_L \mathbf{l}_1 &= 0
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
0 &= (\cos \phi_P \cos \psi_P - \sin \phi_P \cos \theta_P \sin \psi_P) \sin \phi_L \sin \theta_L \\
&\quad - (\sin \phi_P \cos \psi_P + \cos \phi_P \cos \theta_P \sin \psi_P) \cos \phi_L \sin \theta_L \\
&\quad + \sin \theta_P \sin \psi_P \cos \theta_L \\
0 &= (-\cos \phi_P \sin \psi_P - \sin \phi_P \cos \theta_P \cos \psi_P) \sin \phi_L \sin \theta_L \\
&\quad - (-\sin \phi_P \sin \psi_P + \cos \phi_P \cos \theta_P \cos \psi_P) \cos \phi_L \sin \theta_L \\
&\quad + \sin \theta_P \cos \psi_P \cos \theta_L \\
0 &= x_P - \frac{1}{2} l_P (\cos \phi_P \cos \psi_P - \sin \phi_P \cos \theta_P \sin \psi_P) \\
&\quad - x_L - \frac{1}{2} l_L (\cos \phi_L \cos \psi_L - \sin \phi_L \cos \theta_L \sin \psi_L) \\
0 &= y_P - \frac{1}{2} l_P (\sin \phi_P \cos \psi_P + \cos \phi_P \cos \theta_P \sin \psi_P) \\
&\quad - y_L - \frac{1}{2} l_L (\sin \phi_L \cos \psi_L + \cos \phi_L \cos \theta_L \sin \psi_L) \\
0 &= z_P - \frac{1}{2} l_P \sin \theta_P \sin \psi_P - z_L - \frac{1}{2} l_L \sin \theta_L \sin \psi_L
\end{aligned}$$

### Zwangsbedingungen des Gelenks $C$

Das Gelenk  $C$  läßt nur eine einfache Drehung des Kolbens bezüglich des Pleuels zu. Weiterhin ist ein Endpunkt des Pleuels mit dem Schwerpunkt des Kolbens verbunden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_3 &= 0 \\
\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{p}_3 &= 0 \\
\mathbf{r}^{SK} - \mathbf{r}^{SP} - \frac{1}{2} l_P \mathbf{p}_1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (\cos \phi_K \cos \psi_K - \sin \phi_K \cos \theta_K \sin \psi_K) \sin \phi_P \sin \theta_P \\
&\quad - (\sin \phi_K \cos \psi_K + \cos \phi_K \cos \theta_K \sin \psi_K) \cos \phi_P \sin \theta_P \\
&\quad + \sin \theta_K \sin \psi_K \cos \theta_P \\
0 &= (-\cos \phi_K \sin \psi_K - \sin \phi_K \cos \theta_K \cos \psi_K) \sin \phi_P \sin \theta_P \\
&\quad - (-\sin \phi_K \sin \psi_K + \cos \phi_K \cos \theta_K \cos \psi_K) \cos \phi_P \sin \theta_P \\
&\quad + \sin \theta_K \cos \psi_K \cos \theta_P \\
0 &= x_K - x_P - \frac{1}{2} l_P (\cos \phi_P \cos \psi_P - \sin \phi_P \cos \theta_P \sin \psi_P)
\end{aligned}$$

$$0 = y_K - y_P - \frac{1}{2} l_P (\sin \phi_P \cos \psi_P + \cos \phi_P \cos \theta_P \sin \psi_P)$$

$$0 = z_K - z_P - \frac{1}{2} l_P \sin \theta_P \sin \psi_P$$

### Zwangsbedingungen des Gelenks $D$

Das Gelenk  $D$  soll eine Verdrehung des Kolbens um die 3-Achse des Inertialsystems und eine Verschiebung in 2-Richtung des Inertialsystems verhindern.

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

$$\mathbf{r}^{S_K} \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

$$0 = \sin \phi_K \cos \psi_K + \cos \phi_K \cos \theta_K \sin \psi_K$$

$$0 = y_K$$

### Aufgelöste Form der Zwangsbedingungen

Aus der Drehbehinderung des Gelenks  $A$  folgen die Gleichungen für  $\theta_L$  und  $\psi_L$ . Anschließend erhält man aus der Drehbehinderung des Gelenks  $B$  die Gleichungen für  $\theta_P$  und  $\psi_P$ . Dann folgen aus der Drehbehinderung des Gelenks  $C$  die Gleichungen für  $\theta_K$  und  $\psi_K$ . Die Gleichung für  $\phi_K$  ergibt sich schließlich aus der Drehbehinderung des Gelenks  $D$ . Aus den restlichen Zwangsbedingungen folgen dann die Gleichungen für  $x_L, y_L, z_L, x_P, y_P, z_P, x_K, y_K, z_K$  und  $\phi_P$ .

$$\theta_L = 0$$

$$\psi_L = 0$$

$$x_L = \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L$$

$$y_L = \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L$$

$$z_L = 0$$

$$\phi_P = -\arcsin\left(\frac{l_L}{l_P} \sin \phi_L\right)$$

$$\theta_P = 0$$

$$\psi_P = 0$$

$$\begin{aligned}
x_P &= l_L \cos \phi_L + \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P \\
y_P &= l_L \sin \phi_L + \frac{1}{2} l_P \sin \phi_P \\
z_P &= 0 \\
\phi_K &= 0 \\
\theta_K &= 0 \\
\psi_K &= 0 \\
x_K &= l_L \cos \phi_L + l_P \cos \phi_P \\
y_K &= 0 \\
z_K &= 0
\end{aligned}$$

Es empfiehlt sich die Koordinaten die null sind in die Gleichungen der Kinematik einzusetzen. Dadurch erhalten die Gleichungen der Kinematik eine wesentlich einfachere Form.

### Bereinigte Kinematik des Lenkers

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{S_L} &= x_L \mathbf{n}_1 + y_L \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{v}^{S_L} &= \dot{x}_L \mathbf{n}_1 + \dot{y}_L \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{a}^{S_L} &= \ddot{x}_L \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_L \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{l}_1 &= \cos \phi_L \mathbf{n}_1 + \sin \phi_L \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{l}_2 &= -\sin \phi_L \mathbf{n}_1 + \cos \phi_L \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{l}_3 &= \mathbf{n}_3 \\
\boldsymbol{\omega}^L &= \dot{\phi}_L \mathbf{n}_3 \\
\boldsymbol{\alpha}^L &= \ddot{\phi}_L \mathbf{n}_3
\end{aligned}$$

### Bereinigte Kinematik des Pleuels

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{S_P} &= x_P \mathbf{n}_1 + y_P \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{v}^{S_P} &= \dot{x}_P \mathbf{n}_1 + \dot{y}_P \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{a}^{S_P} &= \ddot{x}_P \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_P \mathbf{n}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \cos \phi_P \mathbf{n}_1 + \sin \phi_P \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{p}_2 &= -\sin \phi_P \mathbf{n}_1 + \cos \phi_P \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{n}_3 \\
\boldsymbol{\omega}^P &= \dot{\phi}_P \mathbf{n}_3 \\
\boldsymbol{\alpha}^P &= \ddot{\phi}_P \mathbf{n}_3
\end{aligned}$$

### Bereinigte Kinematik des Kolbens

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{S_K} &= x_K \mathbf{n}_1 \\
\mathbf{v}^{S_K} &= \dot{x}_K \mathbf{n}_1 \\
\mathbf{a}^{S_K} &= \ddot{x}_K \mathbf{n}_1 \\
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{n}_1 \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{n}_2 \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{n}_3 \\
\boldsymbol{\omega}^K &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\alpha}^K &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

## A.2 Dynamik

Die Dynamik wird mit Hilfe der NEWTON-EULER Gleichungen beschrieben. In Abbildung 9 ist das Schnittbild des Schubkurbeltriebes dargestellt.

### Impuls- und Drehimpuls des Lenkers

Impulssatz:

$$\dot{\mathbf{I}}^L = \mathbf{F}_L$$

Impulsänderung:

$$\dot{\mathbf{I}}^L = m_L \mathbf{a}^{S_L}$$

resultierende Kraft aus den eingprägten Kräften und den Zwangskräften:

$$\mathbf{F}_L = (F_1 - F_4) \mathbf{n}_1 + (F_2 - F_5 - m_L g) \mathbf{n}_2 + (F_3 - F_6) \mathbf{n}_3$$

Impulssatz:

$$m_L (\ddot{x}_L \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_L \mathbf{n}_2) = (F_1 - F_4) \mathbf{n}_1 + (F_2 - F_5 - m_L g) \mathbf{n}_2 + (F_3 - F_6) \mathbf{n}_3$$

Drehimpulssatz bezüglich des Schwerpunktes:

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_L/L} = \mathbf{M}_L^{S_L}$$

Drehimpulsänderung bezüglich des Schwerpunktes:

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_L/L} = \Theta_L^{S_L} \cdot \boldsymbol{\alpha}^L + \boldsymbol{\omega}^L \times (\Theta_L^{S_L} \cdot \boldsymbol{\omega}^L)$$

Dyade der Massenträgheitsmomente:

$$\Theta_L^{S_L} = \sum_{i=1}^3 \Theta_{L,ii}^{S_L} \mathbf{l}_i \mathbf{l}_i$$

$$\Theta_L^{S_L} \cdot \boldsymbol{\alpha}^L = \sum_{i=1}^3 \Theta_{L,ii}^{S_L} \mathbf{l}_i (\mathbf{l}_i \cdot \ddot{\phi}_L \mathbf{n}_3) = \Theta_{L,33}^{S_L} \ddot{\phi}_L \mathbf{n}_3$$

$$\Theta_L^{S_L} \cdot \boldsymbol{\omega}^L = \sum_{i=1}^3 \Theta_{L,ii}^{S_L} \mathbf{l}_i (\mathbf{l}_i \cdot \dot{\phi}_L \mathbf{n}_3) = \Theta_{L,33}^{S_L} \dot{\phi}_L \mathbf{n}_3$$

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_L/L} = \Theta_{L,33}^{S_L} \ddot{\phi}_L \mathbf{n}_3 + \dot{\phi}_L \mathbf{n}_3 \times \Theta_{L,33}^{S_L} \dot{\phi}_L \mathbf{n}_3 = \Theta_{L,33}^{S_L} \ddot{\phi}_L \mathbf{n}_3$$

resultierendes Moment aus den eingepägten Kräften und -momenten und den Zwangskräften und -momenten bezüglich des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{S_L} &= (M_1 - M_3) \mathbf{n}_1 + (M_2 - M_4) \mathbf{n}_2 + M \mathbf{n}_3 \\ &\quad - \frac{1}{2} l_L \mathbf{l}_1 \times ((F_1 + F_4) \mathbf{n}_1 + (F_2 + F_5) \mathbf{n}_2 + (F_3 + F_6) \mathbf{n}_3) \\ &= (M_1 - M_3) \mathbf{n}_1 + (M_2 - M_4) \mathbf{n}_2 + M \mathbf{n}_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_1 + F_4) \mathbf{n}_3 - \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_2 + F_5) \mathbf{n}_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_3 + F_6) \mathbf{n}_2 - \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_3 + F_6) \mathbf{n}_1 \\ &= (M_1 - M_3 - \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_3 + F_6)) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (M_2 - M_4 + \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_3 + F_6)) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + (M + \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_1 + F_4) - \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_2 + F_5)) \mathbf{n}_3 \end{aligned}$$

Drehimpulssatz bezüglich des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned}\Theta_{L,33}^{S_L} \ddot{\phi}_L \mathbf{n}_3 &= (M_1 - M_3 - \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_3 + F_6)) \mathbf{n}_1 \\ &+ (M_2 - M_4 + \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_3 + F_6)) \mathbf{n}_2 \\ &+ (M + \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_1 + F_4) - \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_2 + F_5)) \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

### Impuls- und Drehimpuls des Pleuels

Impulssatz:

$$\dot{\mathbf{I}}^P = \mathbf{F}_P$$

Impulsänderung:

$$\dot{\mathbf{I}}^P = m_P \mathbf{a}^{S_P}$$

resultierende Kraft aus den eingprägten Kräften und den Zwangskräften:

$$\mathbf{F}_P = (F_4 - F_7) \mathbf{n}_1 + (F_5 - F_8 - m_P g) \mathbf{n}_2 + (F_6 - F_9) \mathbf{n}_3$$

Impulssatz:

$$m_P (\ddot{x}_P \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_P \mathbf{n}_2) = (F_4 - F_7) \mathbf{n}_1 + (F_5 - F_8 - m_P g) \mathbf{n}_2 + (F_6 - F_9) \mathbf{n}_3$$

Drehimpulssatz bezüglich des Schwerpunktes:

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_P/P} = \mathbf{M}_P^{S_P}$$

Drehimpulsänderung bezüglich des Schwerpunktes:

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_P/P} = \Theta_P^{S_P} \cdot \boldsymbol{\alpha}^P + \boldsymbol{\omega}^P \times (\Theta_P^{S_P} \cdot \boldsymbol{\omega}^P)$$

Dyade der Massenträgheitsmomente:

$$\Theta_P^{S_P} = \sum_{i=1}^3 \Theta_{P,ii}^{S_P} \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i$$

$$\Theta_P^{S_P} \cdot \boldsymbol{\alpha}^P = \sum_{i=1}^3 \Theta_{P,ii}^{S_P} \mathbf{p}_i (\mathbf{p}_i \cdot \ddot{\phi}_P \mathbf{n}_3) = \Theta_{P,33}^{S_P} \ddot{\phi}_P \mathbf{n}_3$$

$$\Theta_P^{S_P} \cdot \boldsymbol{\omega}^P = \sum_{i=1}^3 \Theta_{P,ii}^{S_P} \mathbf{p}_i (\mathbf{p}_i \cdot \dot{\phi}_P \mathbf{n}_3) = \Theta_{P,33}^{S_P} \dot{\phi}_P \mathbf{n}_3$$

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_P/P} = \Theta_{P,33}^{S_P} \ddot{\phi}_P \mathbf{n}_3 + \dot{\phi}_P \mathbf{n}_3 \times \Theta_{P,33}^{S_P} \dot{\phi}_P \mathbf{n}_3 = \Theta_{P,33}^{S_P} \ddot{\phi}_P \mathbf{n}_3$$

resultierendes Moment aus den eingprägten Kräfte- und -momenten und den Zwangskräfte- und -momenten bezüglich des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_P^{S_P} &= (M_3 - M_5) \mathbf{n}_1 + (M_4 - M_6) \mathbf{n}_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} l_P \mathbf{p}_1 \times ((F_4 + F_7) \mathbf{n}_1 + (F_5 + F_8) \mathbf{n}_2 + (F_6 + F_9) \mathbf{n}_3) \\ &= (M_3 - M_5) \mathbf{n}_1 + (M_4 - M_6) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} l_P \sin \phi_P (F_4 + F_7) \mathbf{n}_3 - \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P (F_5 + F_8) \mathbf{n}_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P (F_6 + F_9) \mathbf{n}_2 - \frac{1}{2} l_P \sin \phi_P (F_6 + F_9) \mathbf{n}_1 \\ &= (M_3 - M_5 - \frac{1}{2} l_P \sin \phi_P (F_6 + F_9)) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (M_4 - M_6 + \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P (F_6 + F_9)) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + (\frac{1}{2} l_P \sin \phi_P (F_4 + F_7) - \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P (F_5 + F_8)) \mathbf{n}_3 \end{aligned}$$

Drehimpulssatz bezüglich des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned} \Theta_{P,33}^{S_P} \ddot{\phi}_P \mathbf{n}_3 &= (M_3 - M_5 - \frac{1}{2} l_P \sin \phi_P (F_6 + F_9)) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (M_4 - M_6 + \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P (F_6 + F_9)) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + (\frac{1}{2} l_P \sin \phi_P (F_4 + F_7) - \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P (F_5 + F_8)) \mathbf{n}_3 \end{aligned}$$

### Impuls- und Drehimpuls des Kolbens

Impulssatz:

$$\dot{\mathbf{I}}^K = \mathbf{F}_K$$

Impulsänderung:

$$\dot{\mathbf{I}}^K = m_K \mathbf{a}^{S_K}$$

resultierende Kraft aus den eingprägten Krften und den Zwangskrfen:

$$\mathbf{F}_K = (F_7 - F) \mathbf{n}_1 + (F_8 + F_{10} - m_K g) \mathbf{n}_2 + F_9 \mathbf{n}_3$$

Impulssatz:

$$m_K \ddot{x}_K \mathbf{n}_1 = (F_7 - F) \mathbf{n}_1 + (F_8 + F_{10} - m_K g) \mathbf{n}_2 + F_9 \mathbf{n}_3$$

Drehimpulssatz bezglich des Schwerpunktes:

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_K/K} = \mathbf{M}_K^{S_K}$$

Drehimpulsnderung bezglich des Schwerpunktes:

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_K/K} = \Theta_K^{S_K} \cdot \boldsymbol{\alpha}^K + \boldsymbol{\omega}^K \times (\Theta_K^{S_K} \cdot \boldsymbol{\omega}^K)$$

Dyade der Massentrghheitsmomente:

$$\Theta_K^{S_K} = \sum_{i=1}^3 \Theta_{K,ii}^{S_K} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_i$$

$$\Theta_K^{S_K} \cdot \boldsymbol{\alpha}^K = \sum_{i=1}^3 \Theta_{K,ii}^{S_K} \mathbf{k}_i (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$\Theta_K^{S_K} \cdot \boldsymbol{\omega}^K = \sum_{i=1}^3 \Theta_{K,ii}^{S_K} \mathbf{k}_i (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_K/K} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

resultierendes Moment aus den eingprägten Krften und -momenten und den Zwangskrfen und -momenten bezglich des Schwerpunktes:

$$\mathbf{M}_K^{S_K} = M_5 \mathbf{n}_1 + M_6 \mathbf{n}_2 + M_7 \mathbf{n}_3$$

Drehimpulssatz bezglich des Schwerpunktes:

$$\mathbf{0} = M_5 \mathbf{n}_1 + M_6 \mathbf{n}_2 + M_7 \mathbf{n}_3$$



### Mathematisches Modell

Die Zwangsbedingungen, die nicht in die Gleichungen der Kinematik eingesetzt wurden, gehören zum mathematischen Modell.

$$\begin{aligned}
 x_L &= \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L \\
 y_L &= \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L \\
 \phi_P &= -\arcsin\left(\frac{l_L}{l_P} \sin \phi_L\right) \\
 x_P &= l_L \cos \phi_L + \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P \\
 y_P &= l_L \sin \phi_L + \frac{1}{2} l_P \sin \phi_P \\
 x_K &= l_L \cos \phi_L + l_P \cos \phi_P
 \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen erhält man durch einen Vergleich der Maßzahlen der Impuls- und Drehimpulssätze.

$$\begin{aligned}
 m_L \ddot{x}_L &= F_1 - F_4 \\
 m_L \ddot{y}_L &= F_2 - F_5 - m_L g \\
 0 &= F_3 - F_6 \\
 0 &= M_1 - M_3 - \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_3 + F_6) \\
 0 &= M_2 - M_4 + \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_3 + F_6) \\
 \Theta_{L,33}^{S_L} \ddot{\phi}_L &= M + \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_1 + F_4) - \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_2 + F_5) \\
 m_P \ddot{x}_P &= F_4 - F_7 \\
 m_P \ddot{y}_P &= F_5 - F_8 - m_P g \\
 0 &= F_6 - F_9 \\
 0 &= M_3 - M_5 - \frac{1}{2} l_P \sin \phi_P (F_6 + F_9) \\
 0 &= M_4 - M_6 + \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P (F_6 + F_9) \\
 \Theta_{P,33}^{S_P} \ddot{\phi}_P &= \frac{1}{2} l_P \sin \phi_P (F_4 + F_7) - \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P (F_5 + F_8) \\
 m_K \ddot{x}_K &= F_7 - F \\
 0 &= F_8 + F_{10} - m_K g \\
 0 &= F_9
 \end{aligned}$$

$$0 = M_5$$

$$0 = M_6$$

$$0 = M_7$$

### A.3 Modellbildung mit AUTOLEV

```

% Fallbeispiel: Schubkurbeltrieb

autoz on

% *****
% Deklaration der Objekte
% *****

% n ist das Inertialsystem
newtonian n

% l ist der Lenker
% p ist das Pleuel
% k ist der Kolben
bodies l, p, k

% o ist der Ursprung des Inertialsystems
points o

% q1 ist die verallgemeinerte Koordinate
%   Winkel des Lenkers
% u1 ist die verallgemeinerte Geschwindigkeit
%   Winkelgeschwindigkeit des Lenkers
% f ist die Antriebskraft
% m ist das Lastmoment
variables q{1}', u{1}', f, m

% g ist die Erdbeschleunigung
% ll ist die Laenge des Lenkers
% lp ist die Laenge des Pleuels
% ml ist die Masse des Lenkers
% mp ist die Masse des Pleuels
% mk ist die Masse des Kolbens
% il1 bis il6 sind die Massentraegheitsmomente des Lenkers

```

```

% ip1 bis ip6 sind die Massentraegheitsmomente des Pleuels
% ik1 bis ik6 sind die Massentraegheitsmomente des Kolbens
constants g, ll, lp, ml, mp, mk, il{6}, ip{6}, ik{6}

% *****
% Beschreibung der Kinematik
% *****

% kinematische Differentialgleichung
q1'=u1

% Transformationsmatrix von l nach n
simprot(n, l, 3, q1)
% Transformationsmatrix von p nach n
simprot(n, p, 3, -asin(ll/lp*sin(q1)))
% Transformationsmatrix von k nach n
simprot(n, k, 3, 0)

% Ortvektor von o nach lo
p_o_lo>=ll/2*l1>
% Ortvektor von o nach po
p_o_po>=ll*l1>+lp/2*p1>
% Ortvektor von o nach ko
p_o_ko>=ll*l1>+lp*p1>

% Winkelgeschwindigkeit von l in n
angvel(n, l)
% Winkelgeschwindigkeit von p in n
angvel(n, p)
% Winkelgeschwindigkeit von k in n
angvel(n, k)

% Geschwindigkeit von lo in n
v_lo_n>=dt(p_o_lo>, n)
% Geschwindigkeit von po in n
v_po_n>=dt(p_o_po>, n)
% Geschwindigkeit von ko in n
v_ko_n>=dt(p_o_ko>, n)

% Winkelbeschleunigung von l in n
alf_l_n>=dt(w_l_n>, n)
% Winkelbeschleunigung von p in n

```

```

alf_p_n>=dt(w_p_n>, n)
    % Winkelbeschleunigung von k in n
alf_k_n>=dt(w_k_n>, n)

    % Beschleunigung von lo in n
a_lo_n>=dt(v_lo_n>, n)
    % Beschleunigung von po in n
a_po_n>=dt(v_po_n>, n)
    % Beschleunigung von ko in n
a_ko_n>=dt(v_ko_n>, n)

    % *****
    % Beschreibung der Dynamik
    % *****

    % Gewichtskraefte
force(lo, -ml*g*n2>)
force(po, -mp*g*n2>)
force(ko, -mk*g*n2>)

    % Antriebskraft
force(ko, -f*n1>)

    % Lastmoment
torque(1, m*n3>)

    % Massenzuordnungen
mass l=ml, p=mp, k=mk

    % Massentraegheitsmomentzuordnungen
inertia l, il1, il2, il3, il4, il5, il6
inertia p, ip1, ip2, ip3, ip4, ip5, ip6
inertia k, ik1, ik2, ik3, ik4, ik5, ik6

    % Berechnung der Bewegungsgleichung
zero=fr()+frstar()
kane()

    % *****
    % Generierung des rechnerinternen Modells
    % *****

```

```

% Ausgabegroessen
output t, q1, u1

% Einheiten verschiedener Groessen
units t=s, q1=rad, u1=rad/s, f=N, m=Nm
units g=m/s^2, ll=m, lp=m, ml=kg, mp=kg, mk=kg
units il{1:6}=kg*m^2, ip{1:6}=kg*m^2, ik{1:6}=kg*m^2

% C Programm
code dynamics() skt.c, subs

solve(zero, [u1'])
save skt.all

```

## A.4 Modellbildung mit der IMECH Mechanik-Bibliothek

```

// Fallbeispiel: Schubkurbeltrieb

#define AXIS_X      0
#define AXIS_Y      1
#define AXIS_Z      2

class Schubkurbeltrieb : public DynamicSystem {

public:

    // Gelenk zwischen Inertialsystem und Lenker
    RevoluteJoint      GelenkA;
    // Verbindung von Gelenk A nach Gelenk B (Lenker)
    RigidPrismaticLink  StabAB;
    // Gelenk zwischen Lenker und Pleuel
    RevoluteJoint      GelenkB;
    // Verbindung von Gelenk B nach Gelenk C (Pleuel)
    RigidPrismaticLink  StabBC;
    // Gelenk zwischen Pleuel und Kolben
    RevoluteJoint      GelenkC;
    // Gelenk zwischen Inertialsystem und Kolben
    // Das Gelenk D3 wird geschnitten, um die geschlossene Kette
    // Inertialsystem-Lenker-Pleuel-Kolben-Inertialsystem zu unterbrechen.
    PrismaticJoint     GelenkD1;
    PrismaticJoint     GelenkD2;

```

```

UniversalConstraint      GelenkD3;

    // Loeser fuer den Zwang
C05ncfConstraintSolver  Solver;
    // System, das den Zwang festlegt
DynamicSystem           SolvedSystem;
    // System, das die vom Zwang bestimmten Gelenke beinhaltet
DynamicSystem           ConstrainedSystem;

    // Koerper
FrameMass               Lenker;
FrameMass               Pleuel;
FrameMass               Kolben;

Schubkurbeltrieb(
    R ll,                // Laenge des Lenkers in m
    R lp,                // Laenge des Pleuels in m
    R ml,                // Masse des Lenkers in kg
    R mp,                // Masse des Pleuels in kg
    R mk,                // Masse des Kolbens in kg
    R3x3 il,            // Massentraegheitsmomente des Lenkers in kg*m^2
    R3x3 ip,            // Massentraegheitsmomente des Pleuels in kg*m^2
    R3x3 ik              // Massentraegheitsmomente des Kolbens in kg*m^2
);

} // end class Schubkurbeltrieb

Schubkurbeltrieb::Schubkurbeltrieb(
    R ll, R lp,
    R ml, R mp, R mk,
    R3x3 il, R3x3 ip, R3x3 ik
) :

    // Erste Teilkette:
GelenkA(Frame_gy, AXIS_Z), // Drehung um die z-Achse
StabAB(GelenkA, AXIS_X, ll), // Verschiebung entlang der x-Achse um ll
GelenkB(StabAB, AXIS_Z), // Drehung um die z-Achse
StabBC(GelenkB, AXIS_X, lp), // Verschiebung entlang der x-Achse um lp
GelenkC(StabBC, AXIS_Z), // Drehung um die z-Achse

    // Zweite Teilkette:
GelenkD1(Frame_gy, AXIS_X), // Verschiebung entlang der x-Achse

```

```

GelenkD2(GelenkD1, AXIS_Z), // Verschiebung entlang der z-Achse

// Zwangsbedingung:
// Verbindung von Gelenk C und Gelenk D2
// Drehung um die x- und y-Achse
GelenkD3(GelenkC, GelenkD2, AXIS_X, AXIS_Y),
// Loeser wird als dynamischer Block in die Struktur eingebaut
SolvedSystem(GelenkA, GelenkD3),
ConstrainedSystem(GelenkB, GelenkD2),
Solver(SolvedSystem, ConstrainedSystem, true),

Lenker(GelenkA, ml, R3(l1/2, 0, 0), il),
Pleuel(GelenkB, mp, R3(lp/2, 0, 0), ip),
Kolben(GelenkC, mk, R3(0, 0, 0), ik) {

append(GelenkA, Kolben);

} // end Schubkurbeltrieb::Schubkurbeltrieb

```

## A.5 Modellbildung mit SIMULINK

Das Blockschaltbild für den Schubkurbeltrieb wird aus dem mathematischen Modell der ersten beiden Abschnitte aufgebaut. Die folgende Aufzählung gibt einen Überblick über die im mathematischen Modell auftretenden Größen.

- Koordinaten:  $x_L, y_L, \phi_L, x_P, y_P, \phi_P, x_K$
- Geschwindigkeiten:  $\dot{x}_L, \dot{y}_L, \dot{\phi}_L, \dot{x}_P, \dot{y}_P, \dot{\phi}_P, \dot{x}_K$
- Beschleunigungen:  $\ddot{x}_L, \ddot{y}_L, \ddot{\phi}_L, \ddot{x}_P, \ddot{y}_P, \ddot{\phi}_P, \ddot{x}_K$
- Zwangsgrößen:  $F_1 \dots F_{10}, M_1 \dots M_7$
- Parameter:  $g, l_L, l_P, m_L, m_P, m_K, \Theta_{L,33}^{SL}, \Theta_{P,33}^{SP}$
- unabhängige Koordinate:  $\phi_L$
- unabhängige Geschwindigkeit:  $\dot{\phi}_L$
- unabhängige Beschleunigung:  $\ddot{\phi}_L$

- abhängige Koordinaten:  $x_L, y_L, x_P, y_P, \phi_P, x_K$
- abhängige Geschwindigkeiten:  $\dot{x}_L, \dot{y}_L, \dot{x}_P, \dot{y}_P, \dot{\phi}_P, \dot{x}_K$
- abhängige Beschleunigungen:  $\ddot{x}_L, \ddot{y}_L, \ddot{x}_P, \ddot{y}_P, \ddot{\phi}_P, \ddot{x}_K$

Aus den Zwangsbedingungen des mathematischen Modells kann man die abhängigen Koordinaten aus den unabhängigen Koordinaten berechnen. Die Gleichungen für die Geschwindigkeiten sind die ersten zeitlichen Ableitungen der Zwangsbedingungen. Weiterhin sind die Gleichungen für die Beschleunigungen die zweiten zeitlichen Ableitungen der Zwangsbedingungen. Diese Gleichungen bilden den Block, der als Eingangsgrößen die unabhängigen und als Ausgangsgrößen die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hat.

Aus den Bewegungsgleichungen müssen Gleichungen für die unabhängigen Beschleunigung und die Zwangsgrößen gewonnen werden. Die nachfolgenden Gleichungen sind das Ergebnis. Die Reihenfolge, in der sie aufgeführt sind, entspricht der ihrer Ermittlung. Zunächst ergibt sich für die unabhängige Beschleunigung eine Gleichung. Anschließend erhält man aus den verbleibenden Gleichungen die Zwangsgrößen. Geht man dabei zunächst in der Reihenfolge  $F_1 \dots F_{10}$  und  $M_1 \dots M_7$  vor und stellt eine Zwangsgröße, falls es für sie mehrere Gleichungen gibt, hinten an, dann folgt daraus die nachfolgende Reihenfolge der Gleichungen. Dabei müssen zum Schluß die Gleichungen für die Zwangsgrößen  $F_4, F_5, F_7$  und  $F_8$  durch Probieren gefunden werden.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi}_L &= \frac{1}{\Theta_{L,33}^{sL}} (M + \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_1 + F_4) - \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_2 + F_5)) \\
 F_1 &= m_L \ddot{x}_L + F_4 \\
 F_2 &= m_L \ddot{y}_L + F_5 + m_L g \\
 F_{10} &= m_K g - F_8 \\
 M_1 &= M_3 + \frac{1}{2} l_L \sin \phi_L (F_3 + F_6) \\
 M_2 &= M_4 - \frac{1}{2} l_L \cos \phi_L (F_3 + F_6) \\
 M_3 &= M_5 + \frac{1}{2} l_P \sin \phi_P (F_6 + F_9) \\
 M_4 &= M_6 - \frac{1}{2} l_P \cos \phi_P (F_6 + F_9) \\
 M_5 &= 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
M_6 &= 0 \\
M_7 &= 0 \\
F_3 &= F_6 \\
F_6 &= F_9 \\
F_9 &= 0 \\
F_4 &= m_P \ddot{x}_P + F_7 \\
F_5 &= m_P \ddot{y}_P + F_8 + m_P g \\
F_7 &= m_K \ddot{x}_K + F \\
F_8 &= \frac{1}{\cos \phi_P} \left( \frac{2 \Theta_{P,33}^{S_P}}{l_P} \ddot{\phi}_P + \sin \phi_P (F_4 + F_7) \right) - F_5
\end{aligned}$$

Ein reduziertes Blockschaltbild erhält man, indem man die Gleichungen für die Zwangsgrößen  $F_3$ ,  $F_6$ ,  $F_9$ ,  $M_1 \dots M_7$  und  $F_{10}$  nicht mit einbezieht. Bis auf die letzte Zwangsgröße sind alle null. Die Zwangsgröße  $F_{10}$  ist in keiner der anderen Gleichungen Eingangsgröße. Faßt man die verbleibenden Impuls- und Drehimpulsgleichungen für den Lenker, das Pleuel und den Kolben zusammen, dann ergeben sich daraus die Blockschaltbilder nach den Abbildungen 12, 13 und 14. Das Blockschaltbild für das gesamte mathematische Modell des Schubkurbeltrieb ist in Abbildung 15 dargestellt. In der Tabelle 1 sind die Ein- und Ausgangsgrößen der Blöcke aufgeführt.

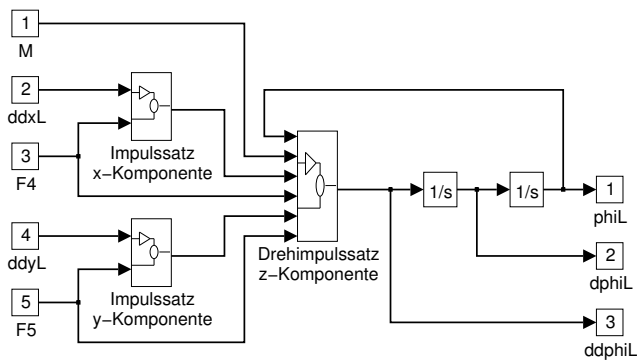


Abbildung 12: Blockschaltbild des Lenkers

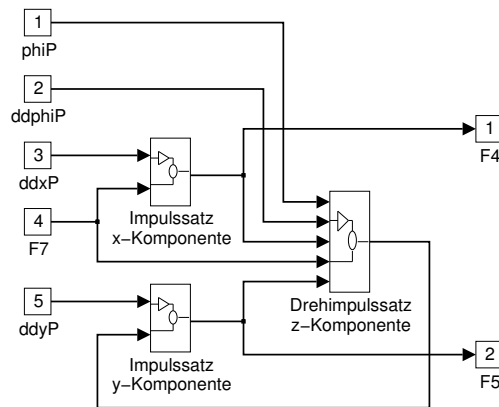


Abbildung 13: Blockschaltbild des Pleuels

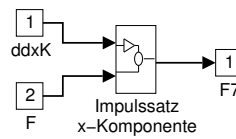


Abbildung 14: Blockschaltbild des Pleuels

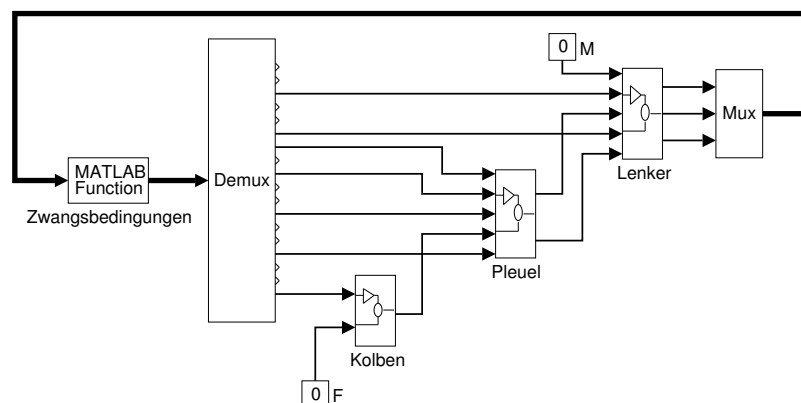


Abbildung 15: Blockschaltbild des mathematischen Modells des Schubkurbeltriebes

| Blockname                   | Eingänge   | Ausgänge  |
|-----------------------------|--|---|
| Lenker/Impulss. x-Komp.     | $\ddot{x}_L, F_4$                                    | $F_1$   |
| Lenker/Impulss. y-Komp.     | $\ddot{y}_L, F_5$                                    | $F_2$   |
| Lenker/Drehimpulss. z-Komp. | $\phi_L, M, F_1, F_4, F_2, F_5$                      | $\ddot{\phi}_L$   |
| Pleuel/Impulss. x-Komp.     | $\ddot{x}_P, F_7$                                    | $F_4$   |
| Pleuel/Impulss. y-Komp.     | $\ddot{y}_P, F_8$                                    | $F_5$   |
| Pleuel/Drehimpulss. z-Komp. | $\phi_P, \ddot{\phi}_P, F_4, F_7, F_5$               | $F_8$   |
| Kolben/Impulss. x-Komp.     | $\ddot{x}_K, F$                                      | $F_7$   |
| Zwangsgrößen                | $\phi_L, \dot{\phi}_L, \ddot{\phi}_L$                | $x_L, \dot{x}_L, \ddot{x}_L, y_L, \dot{y}_L, \ddot{y}_L$<br>$\phi_P, \dot{\phi}_P, \ddot{\phi}_P, x_P, \dot{x}_P, \ddot{x}_P$<br>$y_P, \dot{y}_P, \ddot{y}_P, x_K, \dot{x}_K, \ddot{x}_K$ |
| Lenker                      | $M, \ddot{x}_L, F_4, \ddot{y}_L, F_5$                | $\phi_L, \dot{\phi}_L, \ddot{\phi}_L$   |
| Pleuel                      | $\phi_P, \ddot{\phi}_P, \ddot{x}_P, F_7, \ddot{y}_P$ | $F_4, F_5$  |
| Kolben                      | $\ddot{x}_K, F$                                      | $F_7$   |

Tabelle 1: Ein- und Ausgangsgrößen der Blöcke des Schubkurbeltriebes. Die Größen sind an den Blöcken von oben nach unten angetragen.

## B Fallbeispiel Kufe

### B.1 Kinematik

Die Konfiguration der Kufe wird durch die kartesischen Koordinaten des Schwerpunktes und durch die EULER-Winkel des starren Körpers beschrieben. Die kartesischen Koordinaten beziehen sich auf einen Ruhepunkt und die EULER-Winkel auf das Inertialsystem  $N$ . Die Bezeichnungen entsprechen denen der Abbildung 8.

#### Kinematik der freien Kufe

- kartesischen Koordinaten:  $x_K, y_K, z_K$
- EULER-Winkel:  $\phi_K, \theta_K, \psi_K$

Ortsvektor  $\mathbf{r}^{SK}$ , absolute Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^{SK}$  und absolute Beschleunigung  $\mathbf{a}^{SK}$  des Kufenschwerpunktes:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{SK} &= x_K \mathbf{n}_1 + y_K \mathbf{n}_2 + z_K \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{v}^{SK} &= \dot{x}_K \mathbf{n}_1 + \dot{y}_K \mathbf{n}_2 + \dot{z}_K \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{a}^{SK} &= \ddot{x}_K \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_K \mathbf{n}_2 + \ddot{z}_K \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

Einheitsvektoren  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  und  $\mathbf{k}_3$  des körperfesten Kufenkoordinatensystems:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= (\cos \phi_K \cos \psi_K - \sin \phi_K \cos \theta_K \sin \psi_K) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (\sin \phi_K \cos \psi_K + \cos \phi_K \cos \theta_K \sin \psi_K) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + \sin \theta_K \sin \psi_K \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{k}_2 &= (-\cos \phi_K \sin \psi_K - \sin \phi_K \cos \theta_K \cos \psi_K) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (-\sin \phi_K \sin \psi_K + \cos \phi_K \cos \theta_K \cos \psi_K) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + \sin \theta_K \cos \psi_K \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{k}_3 &= \sin \phi_K \sin \theta_K \mathbf{n}_1 - \cos \phi_K \sin \theta_K \mathbf{n}_2 + \cos \theta_K \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

absolute Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}^K$  der Kufe:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^K &= (\dot{\theta}_K \cos \phi_K + \dot{\psi}_K \sin \theta_K \sin \phi_K) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (\dot{\theta}_K \sin \phi_K - \dot{\psi}_K \sin \theta_K \cos \phi_K) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + (\dot{\phi}_K + \dot{\psi}_K \cos \theta_K) \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

absolute Winkelbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}^K$  der Kufe:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^K &= (\ddot{\theta}_K \cos \phi_K - \dot{\theta}_K \dot{\phi}_K \sin \phi_K) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\ddot{\psi}_K \sin \theta_K \sin \phi_K + \dot{\psi}_K \dot{\theta}_K \cos \theta_K \sin \phi_K + \dot{\psi}_K \dot{\phi}_K \sin \theta_K \cos \phi_K) \mathbf{n}_1 \\ &+ (\ddot{\theta}_K \sin \phi_K + \dot{\theta}_K \dot{\phi}_K \cos \phi_K) \mathbf{n}_2 \\ &+ (-\ddot{\psi}_K \sin \theta_K \cos \phi_K - \dot{\psi}_K \dot{\theta}_K \cos \theta_K \cos \phi_K + \dot{\psi}_K \dot{\phi}_K \sin \theta_K \sin \phi_K) \mathbf{n}_2 \\ &+ (\ddot{\phi}_K + \ddot{\psi}_K \cos \theta_K - \dot{\psi}_K \dot{\theta}_K \sin \theta_K) \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

### Holonome Zwangsbedingung des Gelenks A

Das Gelenk A soll keine Verschiebung der Kufe an der Lagerstelle in 3-Richtung des Inertialsystems zulassen.

$$(\mathbf{r}^{SK} - l_1 \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{n}_3 = 0$$

$$0 = z_K - l_1 \sin \theta_K \sin \psi_K$$

### Zwangsbedingung des Gelenks B

Das Gelenk B soll keine Verschiebung der Kufe an der Lagerstelle in 3-Richtung des Inertialsystems zulassen.

$$(\mathbf{r}^{SK} + l_2 \mathbf{k}_1 - l_3 \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{n}_3 = 0$$

$$0 = z_K + l_2 \sin \theta_K \sin \psi_K - l_3 \sin \theta_K \cos \psi_K$$

### Zwangsbedingung des Gelenks C

Das Gelenk C soll keine Verschiebung der Kufe an der Lagerstelle in 3-Richtung des Inertialsystems zulassen.

$$(\mathbf{r}^{SK} + l_2 \mathbf{k}_1 + l_3 \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{n}_3 = 0$$

$$0 = z_K + l_2 \sin \theta_K \sin \psi_K + l_3 \sin \theta_K \cos \psi_K$$

### Aufgelöste Form der holonomen Zwangsbedingungen

Aus den drei holonomen Zwangsbedingungen erhält man Gleichungen für die Koordinaten  $\theta_K$ ,  $\psi_K$  und  $z_K$ .

$$\theta_K = 0$$

$$\psi_K = 0$$

$$z_K = 0$$

Es empfiehlt sich die Koordinaten die null sind in die Gleichungen der Kinematik einzusetzen. Dadurch erhalten die Gleichungen der Kinematik eine wesentlich einfachere Form.

### Bereinigte Kinematik der Kufe

$$\mathbf{r}^{S_K} = x_K \mathbf{n}_1 + y_K \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{v}^{S_K} = \dot{x}_K \mathbf{n}_1 + \dot{y}_K \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{a}^{S_K} = \ddot{x}_K \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_K \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{k}_1 = \cos \phi_K \mathbf{n}_1 + \sin \phi_K \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{k}_2 = -\sin \phi_K \mathbf{n}_1 + \cos \phi_K \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{n}_3$$

$$\boldsymbol{\omega}^K = \dot{\phi}_K \mathbf{n}_3$$

$$\boldsymbol{\alpha}^K = \ddot{\phi}_K \mathbf{n}_3$$

### Nichtholonome Zwangsbedingung des Gelenks A

Die Schneide am Gelenk A verhindert ein Gleiten der Kufe am Gelenk quer zur Schneidenrichtung.

$$(\mathbf{v}^{S_K} - \boldsymbol{\omega}^K \times l_1 \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{k}_2 = 0$$

$$0 = -\dot{x}_K \sin \phi_K + \dot{y}_K \cos \phi_K - \dot{\phi}_K l_1$$

### Aufgelöste Form der nichtholonomen Zwangsbedingung

Die nichtholonome Zwangsbedingung kann nach allen drei Geschwindigkeiten aufgelöst werden. Sie wird hier willkürlich nach  $\dot{y}_K$  aufgelöst.

$$\dot{y}_K = \frac{1}{\cos \phi_K} (\dot{x}_K \sin \phi_K + \dot{\phi}_K l_1)$$

## B.2 Dynamik

Die Dynamik wird mit Hilfe der NEWTON-EULER Gleichungen beschrieben. In Abbildung 10 ist das Schnittbild der Kufe dargestellt.

### Impuls- und Drehimpuls des Kolbens

Impulssatz:

$$\dot{\mathbf{i}}^K = \mathbf{F}_K$$

Impulsänderung:

$$\dot{\mathbf{i}}^K = m_K \mathbf{a}^{S_K}$$

resultierende Kraft aus den eingprägten Kräften und den Zwangskräften:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_K &= F \mathbf{k}_1 + F_1 \mathbf{k}_2 + (F_2 + F_3 + F_4 - m_K g) \mathbf{n}_3 \\ &= (F \cos \phi_K - F_1 \sin \phi_K) \mathbf{n}_1 + (F \sin \phi_K + F_1 \cos \phi_K) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + (F_2 + F_3 + F_4 - m_K g) \mathbf{n}_3 \end{aligned}$$

Impulssatz:

$$\begin{aligned} m_K (\ddot{x}_K \mathbf{n}_1 + \ddot{y}_K \mathbf{n}_2) &= (F \cos \phi_K - F_1 \sin \phi_K) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (F \sin \phi_K + F_1 \cos \phi_K) \mathbf{n}_2 + (F_2 + F_3 + F_4 - m_K g) \mathbf{n}_3 \end{aligned}$$

Drehimpulssatz bezüglich des Schwerpunktes:

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_K/K} = \mathbf{M}_K^{S_K}$$

Drehimpulsänderung bezüglich des Schwerpunktes:

$$\dot{\mathbf{D}}^{S_K/K} = \Theta_K^{S_K} \cdot \boldsymbol{\alpha}^K + \boldsymbol{\omega}^K \times (\Theta_K^{S_K} \cdot \boldsymbol{\omega}^K)$$

Dyade der Massenträgheitsmomente:

$$\Theta_K^{S_K} = \sum_{i=1}^3 \Theta_{K,ii}^{S_K} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_i$$

$$\Theta_K^{S_K} \cdot \boldsymbol{\alpha}^K = \sum_{i=1}^3 \Theta_{K,ii}^{S_K} \mathbf{k}_i (\mathbf{k}_i \cdot \ddot{\phi}_K \mathbf{n}_3) = \Theta_{K,33}^{S_K} \ddot{\phi}_K \mathbf{k}_3$$

$$\Theta_K^{S_K} \cdot \boldsymbol{\omega}^K = \sum_{i=1}^3 \Theta_{K,ii}^{S_K} \mathbf{k}_i (\mathbf{k}_i \cdot \dot{\phi}_K \mathbf{n}_3) = \Theta_{K,33}^{S_K} \dot{\phi}_K \mathbf{k}_3$$

$$\dot{D}^{S_K/K} = \Theta_{K,33}^{S_K} \ddot{\phi}_K \mathbf{k}_3 + \dot{\phi}_K \mathbf{k}_3 \times \Theta_{K,33}^{S_K} \dot{\phi}_K \mathbf{k}_3 = \Theta_{K,33}^{S_K} \ddot{\phi}_K \mathbf{k}_3$$

resultierendes Moment aus den eingprägten Krften und -momenten und den Zwangs-  
krften und -momenten bezglich des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_K^{S_K} &= M \mathbf{n}_3 - l_1 \mathbf{k}_1 \times (F_1 \mathbf{k}_2 + F_2 \mathbf{n}_3) + (l_2 \mathbf{k}_1 - l_3 \mathbf{k}_2) \times F_3 \mathbf{n}_3 \\ &\quad + (l_2 \mathbf{k}_1 + l_3 \mathbf{k}_2) \times F_4 \mathbf{n}_3 \\ &= M \mathbf{k}_3 - l_1 F_1 \mathbf{k}_3 + l_1 F_2 \mathbf{k}_2 - l_2 F_3 \mathbf{k}_2 - l_3 F_3 \mathbf{k}_1 - l_2 F_4 \mathbf{k}_2 + l_3 F_4 \mathbf{k}_1 \\ &= l_3 (F_4 - F_3) \mathbf{k}_1 + (l_1 F_2 - l_2 (F_3 + F_4)) \mathbf{k}_2 + (M - l_1 F_1) \mathbf{k}_3 \end{aligned}$$

Drehimpulssatz bezglich des Schwerpunktes:

$$\Theta_{K,33}^{S_K} \ddot{\phi}_K \mathbf{k}_3 = l_3 (F_4 - F_3) \mathbf{k}_1 + (l_1 F_2 - l_2 (F_3 + F_4)) \mathbf{k}_2 + (M - l_1 F_1) \mathbf{k}_3$$

## Mathematisches Modell

Die einzige Zwangsbedingung, die noch nicht in die Gleichungen der Kinematik eingesetzt wurde, ist die nichtholonome Zwangsbedingung. Sie gehrt zum mathematischen Modell.

$$\dot{y}_K = \frac{1}{\cos \phi_K} (\dot{x}_K \sin \phi_K + \dot{\phi}_K l_1)$$



Die Bewegungsgleichungen erhält man durch einen Vergleich der Maßzahlen des Impuls- und Drehimpulssatzes.

$$\begin{aligned}
 m_K \ddot{x}_K &= F \cos \phi_K - F_1 \sin \phi_K \\
 m_K \ddot{y}_K &= F \sin \phi_K + F_1 \cos \phi_K \\
 0 &= F_2 + F_3 + F_4 - m_K g \\
 0 &= l_3 (F_4 - F_3) \\
 0 &= l_1 F_2 - l_2 (F_3 + F_4) \\
 \Theta_{K,33}^{S_K} \ddot{\phi}_K &= M - l_1 F_1
 \end{aligned}$$

### B.3 Modellbildung mit AUTOLEV

```

% Fallbeispiel: Kufe

autoz on

% *****
% Deklaration der Objekte
% *****

% n ist das Inertialsystem
newtonian n

% k ist die Kufe
bodies k

% o ist der Ursprung des Inertialsystems
% p ist der Beruehrpunkt der Schneide
points o, p

% q1 bis q3 sind die verallgemeinerten Koordinaten
%      x-Koordinate der Kufe
%      y-Koordinate der Kufe
%      Winkel der Kufe
% u1 bis u3 sind die verallgemeinerten Geschwindigkeiten
%      Geschwindigkeit der Kufe in x-Richtung
%      Geschwindigkeit der Kufe in y-Richtung
%      Winkelgeschwindigkeit der Kufe
% f ist die Antriebskraft

```

```

% m ist das Lenkmoment
variables q{3}', u{3}', f, m

% g ist die Erdbeschleunigung
% l1 ist der Achsabstand 1
% mk ist die Masse der Kufe
% ik1 bis ik6 sind die Massentraegheitsmomente der Kufe
constants g, l1, mk, ik{6}

% *****
% Beschreibung der Kinematik
% *****

% kinematische Differentialgleichungen
q1'=u1
q2'=u2
q3'=u3

% Transformationsmatrix von k nach n
simprot(n, k, 3, q3)

% Ortvektor von o nach ko
p_o_ko>=q1*n1>+q2*n2>
% Ortvektor von o nach p
p_o_p>=q1*n1>+q2*n2>-l1*k1>

% Winkelgeschwindigkeit von k in n
angvel(n, k)

% Geschwindigkeit von ko in n
v_ko_n>=dt(p_o_ko>, n)
% Geschwindigkeit von p in n
v_p_n>=dt(p_o_p>, n)

% nichtholonome Zwangsbedingung
dependent[1]=dot(v_p_n>, k2>)
constrain(dependent[u2])

% Winkelbeschleunigung von k in n
alf_k_n>=dt(w_k_n>, n)

% Beschleunigung von ko in n

```

```

a_ko_n>=dt(v_ko_n>, n)

% *****
% Beschreibung der Dynamik
% *****

% Gewichtskraft
force(ko, -mk*g*n3>)

% Antriebskraft
force(ko, f*k1>)

% Lenkmoment
torque(k, m*n3>)

% Massenzuordnung
mass k=mk

% Massentraegheitsmomentzuordnung
inertia k, ik1, ik2, ik3, ik4, ik5, ik6

% Berechnung der Bewegungsgleichungen
zero=fr()+frstar()
kane()

% *****
% Generierung des rechnerinternen Modells
% *****

% Ausgabegroessen
output t, q1, q2, q3, u1, u2, u3

% Einheiten verschiedener Groessen
units t=s, q1=m, q2=m, q3=rad, u1=m/s, u2=m/s, u3=rad/s, f=N, m=Nm
units g=m/s^2, l1=m, mk=kg, ik{1:6}=kg*m^2

% C Programm
code dynamics() kufe.c, subs

solve(zero, [u1', u3'])
save kufe.all

```

## B.4 Modellbildung mit der IMECH Mechanik-Bibliothek

```

// Fallbeispiel: Kufe

#define AXIS_X      0
#define AXIS_Y      1
#define AXIS_Z      2

class Kufe : public DynamicSystem {

public:

    // Fuer die Kufe wird ein zum Originalmodell kinematisch
    // gleichwertiges Modell benutzt.
    // Gelenk 1 bis 3 ermoeglichen eine ebene Bewegung.
    PrismaticJoint      Gelenk1;
    PrismaticJoint      Gelenk2;
    RevoluteJoint       Gelenk3;
    // Abstand vom Schwerpunkt zur Schneide
    RigidPrismaticLink  Link;
    // Richtung, in der die Geschwindigkeit null sein soll
    FrameAxis           Richtung;
    // Gleitbedingung
    SkidConstraint       Schneide;
    // Koerper
    FrameMass            Masse;

    Kufe(
        R l1,           // Achsabstand 1 in m
        R mk,           // Masse der Kufe in kg
        R3x3 ik        // Massentraegheitsmomente der Kufe in kg*m^2
    );

} // end class Kufe

Kufe::Kufe(R l1, R mk, R3x3 ik) :

    Gelenk1(Frame_gz, AXIS_X), // Verschiebung entlang der x-Achse
    Gelenk2(Gelenk1, AXIS_Y), // Verschiebung entlang der y-Achse
    Gelenk3(Gelenk2, AXIS_Z), // Drehung um die z-Achse
    Link(Gelenk3, AXIS_X, -l1), // Verschiebung entlang der x-Achse um -l1

```

```

// Das Endkoordinatensystem von Link ist das Koordinatensystem, dessen
// Geschwindigkeit eingeschaenkt werden soll.
// Die Richtung ist die y-Richtung, das ist die Richtung quer zur Kufe.
Richtung(Link, AXIS_Y),
Schneide(Richtung, Frame_gz),

Masse(Gelenk3, mk, R3(0, 0, 0), ik) {

append(Gelenk1, Masse);

} // end Kufe::Kufe

```

## B.5 Modellbildung mit SIMULINK

Das Blockschaltbild für die Kufe wird aus dem mathematischen Modell der ersten beiden Abschnitte aufgebaut. Die folgende Aufzählung gibt einen Überblick über die im mathematischen Modell auftretenden Größen.

- Koordinaten:  $x_K, y_K, \phi_K$
- Geschwindigkeiten:  $\dot{x}_K, \dot{y}_K, \dot{\phi}_K$ ,
- Beschleunigungen:  $\ddot{x}_K, \ddot{y}_K, \ddot{\phi}_K$
- Zwangsgrößen:  $F_1 \dots F_4$
- Parameter:  $g, l_1, l_2, l_3, m_K, \Theta_{K,33}^{S_K}$
- unabhängige Koordinaten:  $x_K, y_K, \phi_K$
- unabhängige Geschwindigkeiten:  $\dot{x}_K, \dot{\phi}_K$
- unabhängige Beschleunigungen:  $\ddot{x}_K, \ddot{\phi}_K$
- abhängige Geschwindigkeit:  $\dot{y}_K$
- abhängige Beschleunigung:  $\ddot{y}_K$

Aus der Zwangsbedingung des mathematischen Modells kann man die abhängige Geschwindigkeit berechnen. Die Gleichung für die abhängige Beschleunigung erhält man

aus der ersten zeitlichen Ableitungen der Zwangsbedingung. Diese Gleichung bildet den Block, der als Eingangsgrößen die unabhängigen und als Ausgangsgrößen die abhängigen Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hat.

Aus den Bewegungsgleichungen müssen Gleichungen für die unabhängigen Beschleunigungen und die Zwangsgrößen gewonnen werden. Die nachfolgenden Gleichungen sind das Ergebnis. Die Reihenfolge, in der sie aufgeführt sind, entspricht der ihrer Ermittlung. Zunächst ergeben sich für die unabhängigen Beschleunigungen zwei Gleichungen. Anschließend erhält man aus den verbleibenden Gleichungen die Zwangsgrößen. Geht man dabei zunächst in der Reihenfolge  $F_1 \dots F_4$  vor und stellt eine Zwangsgröße, falls es für sie mehrere Gleichungen gibt, hinten an, dann folgt daraus die nachfolgende Reihenfolge der Gleichungen. Dabei müssen zum Schluß die Gleichungen für die Zwangsgrößen  $F_2 \dots F_4$  durch Probieren gefunden werden.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_K &= \frac{1}{m_K} (F \cos \phi_K - F_1 \sin \phi_K) \\ \ddot{\phi}_K &= \frac{1}{\Theta_{K,33}^{S_K}} (M - l_1 F_1) \\ F_1 &= \frac{1}{\cos \phi_K} (m_K \ddot{y}_K - F \sin \phi_K) \\ F_2 &= m_K g - F_3 - F_4 \\ F_3 &= F_4 \\ F_4 &= \frac{l_1}{l_2} F_2 - F_3 \end{aligned}$$

Ein reduziertes Blockschaltbild erhält man, indem man die Gleichungen für die Zwangsgrößen  $F_2 \dots F_4$  nicht mit einbezieht, da sie in keine der anderen Gleichungen Eingangsgrößen sind. Faßt man die verbleibenden Impuls- und Drehimpulsgleichungen für die Kufe zusammen, dann ergibt sich daraus das Blockschaltbild nach Abbildung 16. Das Blockschaltbild für das gesamte mathematische Modell der Kufe ist in Abbildung 17 dargestellt. In der Tabelle 2 sind die Ein- und Ausgangsgrößen der Blöcke aufgeführt.

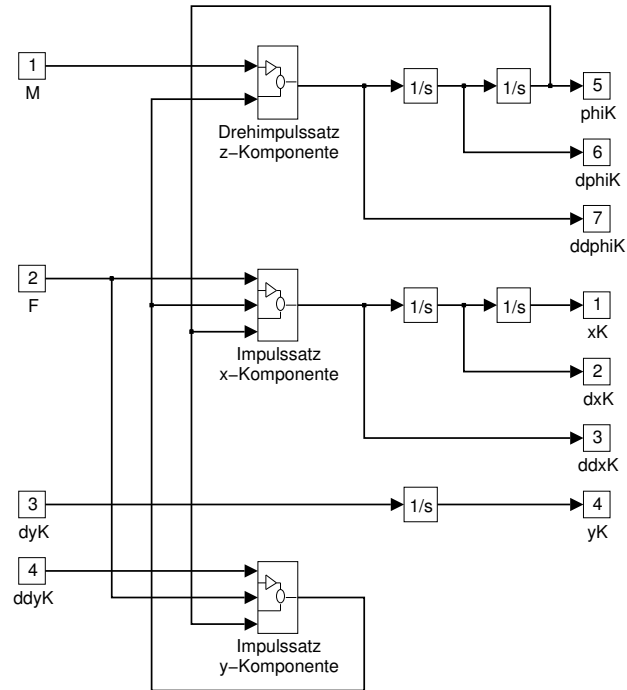


Abbildung 16: Blockschaltbild der Kufe

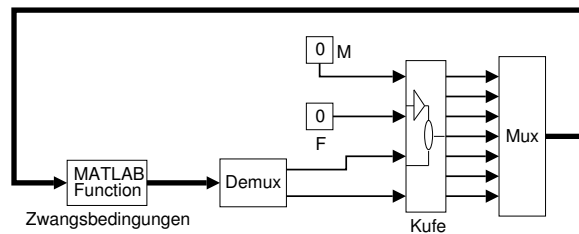


Abbildung 17: Blockschaltbild des mathematischen Modells der Kufe

| Blockname                 | Eingänge   | Ausgänge   |
|---------------------------|--|--|
| Kufe/Impulss. x-Komp.     | $F, F_1, \phi_K$   | $\ddot{x}_K$   |
| Kufe/Impulss. y-Komp.     | $\ddot{y}_K, F, \phi_K$  | $F_1$  |
| Kufe/Drehimpulss. z-Komp. | $M, F_1$   | $\ddot{\phi}_K$  |
| Zwangsgrößen              | $x_K, \dot{x}_K, \ddot{x}_K, y_K, \phi_K, \dot{\phi}_K, \ddot{\phi}_K$ | $\dot{y}_K, \ddot{y}_K$  |
| Kufe                      | $M, F, \dot{y}_K, \ddot{y}_K$  | $x_K, \dot{x}_K, \ddot{x}_K, y_K$<br>$\phi_K, \dot{\phi}_K, \ddot{\phi}_K$ |

Tabelle 2: Ein- und Ausgangsgrößen der Blöcke der Kufe. Die Größen sind an den Blöcken von oben nach unten angetragen.



## Literatur

- [1] Anantharaman, Martin/Hiller Manfred, Integrierte Entwicklungsumgebung zum Entwurf mechatronischer Systeme, Vortrag GMA-Kongreß Meß- und Automatisierungstechnik, 1996.
- [2] Anantharaman, Martin et. al., Integrated Development Environment for Mechatronic Systems, Third Conference on Mechatronics and Robotics, 1996.
- [3] Asselborn, Wolfgang et. al., Lehren und Lernen mit dem Computer: 1 Computereinsatz im Fachunterricht, Tübingen, Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen, 1990.
- [4] Cellier, F. E., Continuous System Modelling, Heidelberg, Springer-Verlag, 1991.
- [5] Kane, Thomas R./Levinson, David A., Dynamics: Theory and Application, New York, McGraw-Hill, Inc., 1985.
- [6] Päsler, Max, Prinzipie der Mechanik, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1968.
- [7] Meirovitch, Leonard, Methods of Analytical Dynamics, New York, McGraw-Hill Book Company, 1970.
- [8] Matko, Drago et. al., Simulation an Modelling of Continuous Systems, New York, Prentice Hall, 1992.
- [9] Möller, Dietmar, Modellbildung, Simulation und Identifikation dynamischer Systeme, Berlin, Spriger-Verlag, 1992.
- [10] Wallaschek, Jörg, Modellierung und Simulation als Beitrag zur Verkürzung der Entwicklungszeiten mechatronischer Produkte, VDI Berichte, 1995, 1215:35-50.
- [11] Walser, Werner et. al., Lehren und Lernen mit dem Computer: 12 Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme, Tübingen, Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen, 1991.