

Systematischer Entwurf von Wellendigitalstrukturen

Karlheinz Ochs und Benno Stein
ochs@ieee.org, stein@uni-paderborn.de
Arbeitsgruppen Nachrichtentheorie, Wissensbasierte Systeme
Universität Paderborn, Warburger Str. 100, 33098 Paderborn

Kurzfassung

Wellendigitalstrukturen sind besonders leistungsfähige algorithmische Modelle zur Simulation elektrischer Netzwerke. Dieses Papier stellt eine Systematik und einen laufzeitoptimalen Algorithmus zur Synthese von Wellendigitalstrukturen vor.

1 Einleitung

Für den Entwurf und für die Synthese elektrischer Netzwerke ist die Simulation ein unentbehrliches Hilfsmittel, das eine Analyse der entworfenen Schaltung erlaubt, bevor sie überhaupt realisiert worden ist. Damit beispielsweise die Einhaltung von vorgegebenen Anforderungsspezifikationen auf einem Digitalrechner zuverlässig überprüft werden kann, ist es notwendig, dass wesentliche physikalische Eigenschaften der elektrischen Schaltung möglichst getreu durch die Simulation wiedergegeben werden. Eine spezielle Methode hierfür ist das Wellendigitalkonzept, bei dem die energetischen Eigenschaften des nachzubildenden Netzwerkes in der Modellierungsphase berücksichtigt werden [1]. Obwohl diese Methode ursprünglich aus dem Bereich der Digitalfilter stammt, lässt sie sich gleichermaßen auch bei elektrischen Netzwerken anwenden, die neben linearen auch nichtlineare Elemente enthalten können [2].

Für die Übertragung energetischer Eigenschaften wie zum Beispiel der Passivität der elektrischen Schaltung ist die Verwendung *passiver Integrationsmethoden* für die numerische Lösung differential-algebraischer Zusammenhänge erforderlich [3–6]. Da die Forderung nach der Passivität einer Integrationsmethode jedoch explizite Verfahren ausschließt, führt eine Formulierung des Algorithmus in den Signalgrößen Spannung und Strom zwangsläufig auf implizite Gleichungen, deren Lösungen oftmals nur mit einem erheblichen Aufwand bestimmt werden können. Beim Wellendigitalkonzept verwendet man dagegen als Signalparameter so genannte Wellengrößen, mit denen in vielen Fällen ein expliziter Algorithmus erzielt wird. Als Nachteil dieses Konzepts ist zu nennen, dass eine Systematik für die Erzeugung von Wellendigitalmodellen nur für spezielle Topologien der KIRCHHOFF-Verbindungsnetzwerke vorliegt. In diesem Aufsatz wird ein Ansatz vorgestellt, der eine systematische und effiziente Generierung von Wellendigitalmodellen ermöglicht.

2 Vom elektrischen Netzwerk zum Wellendigitalmodell

Die Modellierung eines technischen Systems auf einem Digitalrechner erfolgt in verschiedenen Abstraktionsstufen. Für die Verwirklichung seines mentalen Modells fertigt sich der Entwickler in der Regel vom gedachten System ein Strukturmodell an, das eine Zeichnung oder eine grafische Darstellung sein kann, welche die Struktur des Systems in Form von interagierenden Teilsystemen zeigt. Das Strukturmodell dient als Ausgangspunkt für ein Verhaltensmodell (mathematisches Modell), in dem die Teilsysteme und ihre Beziehungen in mathematischer Form notiert werden. Die Erzeugung eines algorithmischen Modells ist geprägt von den eingesetzten Verfahren zur Simulation; u. a. analysiert man das mathematische Modell hinsichtlich einer kausalen Ordnung (BLT-Zerlegung, Tearing), erzeugt bestimmte Normalformen, oder wendet andere algebraische Operationen an. Formuliert man das algorithmische Modell schließlich in einer Computer- oder in einer Simulationssprache – wie zum Beispiel ACSL [7] – erhält man als unterste Abstraktionsstufe das Computermodell in Form eines Programms, s. Abbildung 1.

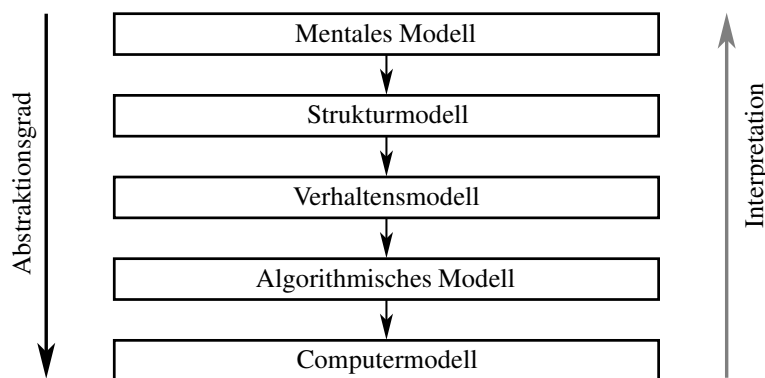


Abbildung 1: Hierarchie der Modelle bezüglich des Abstraktionsniveaus.

Für die Wellendigitalmodellierung wird nun von einem Verhaltensmodell eines elektrischen Netzwerkes ausgegangen, so dass die mathematische Beschreibung der Bausteine und ihrer Verknüpfungen in Form von Bauelemente- bzw. KIRCHHOFF-Gleichungen vorliegt. Um zum algorithmischen Modell zu gelangen, wird das elektrische Netzwerk torweise zerlegt, wobei ein Tor ein Klemmenpaar darstellt, dessen hineinfließender Strom gleich dem herausfließendem Strom ist. Jedem Tor ν ordnet man nun eine als Torwiderstand bezeichnete positive Konstante R_ν zu. Anstelle der Spannung u_ν und des Stromes i_ν verwendet man als Signalparameter Linearkombination dieser Größen, die als Wellengrößen bezeichnet werden:

$$a_\nu := u_\nu + R_\nu i_\nu \quad \text{und} \quad b_\nu := u_\nu - R_\nu i_\nu. \quad (1)$$

Mit dieser Definition erhält man für die statischen Bausteine wie Quellen, Widerstände, Übertrager, usw. äquivalente Bausteine im Wellenbereich. Die differential-algebraischen Signalbeziehungen der dynamischen Elemente werden durch passive Integrationsverfahren

approximiert, wobei in der Regel die Trapez-Regel gewählt wird. Zum Beispiel wird die Signalbeziehung einer Kapazität, $\dot{u}(t) = C^{-1}i(t)$, mit der Trapez-Regel durch

$$u(t_{k+1}) - Ri(t_{k+1}) = u(t_k) + Ri(t_k) \quad \text{mit} \quad R := T/(2C) \quad (2)$$

approximiert, wobei $T > 0$ die Schrittweite ist. Es handelt sich hier um eine implizite Differenzgleichung, denn $u(t_{k+1})$ ist vom Strom $i(t_{k+1})$ abhängig, der wiederum über das restliche Netzwerk von der Spannung $u(t_{k+1})$ bestimmt wird. Verwendet man dagegen Wellengrößen als Signalparameter, die auf den Torwiderstand R bezogen sind, so erhält man im Wellendigitalbereich eine Verzögerung: $b(t_{k+1}) = a(t_k)$.

Schließlich wird noch das KIRCHHOFF-Verbindungsnetzwerk im Wellenbereich durch eine Adaptorstruktur repräsentiert, die aus zu Parallel- und Serienverbindungen korrespondierenden Adaptoren besteht. Der entscheidende Schritt hierbei ist die Zerlegung des Verbindungsnetzwerkes in Mehrtore, die neben Parallel- und Serienverbindungen auch sehr komplizierte Verbindungsstrukturen sein können. Zwar sind Methoden für die Synthese von Adaptorstrukturen allgemeiner Verbindungsnetzwerke bekannt [8], jedoch ist der benötigte Aufwand quadratisch in der Anzahl der äußeren Tore, weshalb eine Zerlegung in Mehrtore mit minimaler Torzahl anzustreben ist. Eine systematische Analyse des Verbindungsnetzwerkes wird im folgenden Abschnitt erläutert.

3 Systematische Analyse des Verbindungsnetzwerkes

Die hier vorgestellte Analyse des KIRCHHOFF-Verbindungsnetzwerkes basiert auf den graphentheoretischen Konzepten *Zusammenhang*, *unabhängiges Teilnetzwerk*, *dreifach zusammenhängende Komponente* und *Parallel-Seriell-Graph*. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Definitionen und Lemmata knapp dargestellt; der Abschnitt 4 illustriert die Ausführungen an einem kleinem Beispiel. Für eine ausführliche Diskussion sei auf ein nachfolgendes Papier und auf [9] verwiesen.

Ziel der topologischen Analyse des Verbindungsnetzwerkes eines elektrischen Systems S ist die Identifizierung aller Tore in S . Für diese Betrachtungen abstrahieren wir von S auf den korrespondierenden Graphen $G = \langle V, E \rangle$, wobei zwischen den Kanten E und den Elementen in S ein bijektiver Zusammenhang besteht. Zwei Kanten aus E sind inzident zu demselben Knoten in V , falls die entsprechenden Elemente in S mit einem Anschluß an einem gemeinsamen Potential liegen (siehe Abbildung 2).

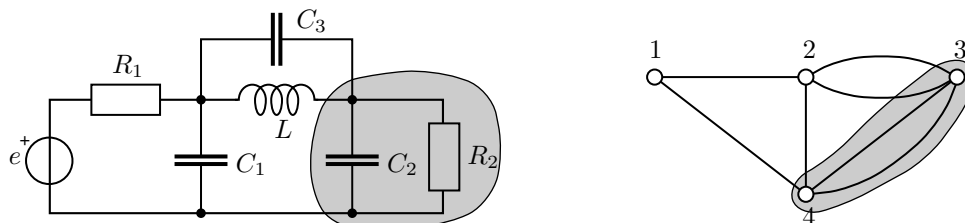


Abbildung 2: Elektrischer Schaltkreis mit zugehörigem Graph. Der schattierte Bereich markiert ein unabhängiges Teilnetzwerk (siehe Definition 1).

Offensichtlich stellen alle Kanten in $G = \langle V, E \rangle$ Eintore dar; mehrere Kanten zusammen können auch ein Eintor bilden, wenn sie auf Grund ihrer Verschaltung die in Abschnitt 2 genannte Torbedingung erfüllen. Solche Teilgraphen heißen unabhängige Teilnetzwerke; sie besitzen zwei Anschlußpunkte s, t und sind wie folgt definiert:

Definition 1 (Unabhängiges Teilnetzwerk [10]) Sei $G = \langle V, E \rangle$ ein Graph und sei H ein induzierter Untergraph von G mit der Knotenmenge $V_H \subset V$, $|V_H| > 2$. Weiterhin seien s und t zwei ausgezeichnete Knoten in V_H . Dann heißt $\langle H, s, t \rangle$ unabhängiges Teilnetzwerk von G , falls jeder Weg von einem Knoten aus $V \setminus V_H$ zu einem Knoten in V_H entweder s oder t enthält.

Ein unabhängiges Teilnetzwerk heißt minimal, wenn kein auf einer echten Teilmenge von V_H induzierter Untergraph ein unabhängiges Teilnetzwerk darstellt.

Bezüglich der Zerlegung eines Verbindungsnetzwerkes sind wir an der Identifikation aller minimalen, unabhängigen Teilnetzwerke in $G = \langle V, E \rangle$ interessiert.

Verschaltet man zwei unabhängige Teilnetzwerke an ihren Anschlußpunkten, so entsteht entweder eine Reihenverknüpfung oder eine Parallelverknüpfung. Umgekehrt kann man jeden Graphen bezüglich seiner unabhängigen Teilnetzwerke als Seriell-Parallel-Graph darstellen. Folgende Definition ist hierbei interessant:

Definition 2 (Knotenzusammenhang $\kappa(G)$) Sei $G = \langle V, E \rangle$ ein Graph. $\kappa(G)$ heißt Knotenzusammenhang von G , wenn gilt: $\kappa(G) = \min\{|T| \mid T \subset V \text{ und } G[V \setminus T] \text{ ist nicht zusammenhängend}\}$. G heißt k -fach zusammenhängend, falls $\kappa(G) \geq k$. $G[V']$ bezeichne den auf $V' \subseteq V$ induzierten Untergraphen von G .

Der (Knoten-)Zusammenhang eines Seriell-Parallel-Graphen ist höchstens zwei; der Zusammenhang innerhalb eines unabhängigen Teilnetzwerkes kann jedoch höher sein. Hieraus leitet sich der Begriff der dreifach zusammenhängenden Komponente ab: Vereinfachend gesagt, handelt sich dabei um diejenigen Teilgraphen, in die ein Graph G zerfallen kann, wenn man zwei Knoten aus V entfernt. Abgesehen von einfach zu entdeckenden Ausnahmen (Stichwort: s - t -Zusammenhang) entsprechen diese dreifach zusammenhängenden Komponenten den gesuchten minimalen unabhängigen Teilnetzwerken.

Unter Verwendung des Begriffs der dreifachen Zusammenhangskomponenten kann jeder Graph in Form eines SPC-Baums dargestellt werden.

Definition 3 (SPC-Baum) Ein SPC-Baum $T_{\langle G, s, t \rangle}$ eines Multigraphen $\langle G, s, t \rangle$ mit den zwei Anschlußpunkten s und t ist ein Baum mit ausgezeichneter Wurzel, dessen innere Knoten entweder vom Typ S, P oder C sind. Ein C -Knoten korrespondiert mit dem Graphen $\langle V_H, E_H, u, v \rangle$; die anderen Knoten sind durch ein Paar (u, v) gekennzeichnet. Die Nachfolger eines S -Knoten sind geordnet; die Blätter von $T_{\langle G, s, t \rangle}$ korrespondieren mit den Kanten von G .

Jeder Knoten eines SPC-Baums entspricht eindeutig einem Graphen $\langle H, u, v \rangle$; die Wurzel von $T_{\langle G, s, t \rangle}$ repräsentiert $\langle G, s, t \rangle$. Der durch einen S -Knoten definierte zweipolige

Graph entsteht aus der Reihenverknüpfung seiner Nachfolger gemäß der definierten Ordnung; der durch einen P -Knoten definierte Graph entsteht aus der Parallelverknüpfung seiner Nachfolger; jeder Graph an einem C -Knoten ist dreifach zusammenhängend.

Ein SPC-Baum heißt *normalisiert*, wenn jeder Knoten vom Typ S oder P höchstens zwei Nachfolger hat und wenn die Wurzel des Baums auch sein Zentrum bildet. Ein normalisierter SPC-Baum beschreibt in expliziter und eindeutiger Weise die optimale Adaptorstruktur für ein KIRCHHOFF-Verbindungsnetzwerk mit dem Graphen G .

Auf Grundlage eines von HOPCROFT und TARJAN entwickelten Algorithmus können die dreifach zusammenhängenden Komponenten eines Graphen in linearer Zeit seiner Kanten (bzw. der Elemente in S) bestimmt werden [11]. Da auch alle anderen Syntheseschritte (Normalisierung des SPC-Baums, Berechnung der Torwiderstände und Adaptorkoeffizienten) in linearer Zeit durchführbar sind, gelingt die Synthese einer optimalen Adaptorstruktur mit dem nachfolgend angegebenen Algorithmus ADAPTORS in linearer Zeit.

4 Algorithmus und Beispiel

In dem hier gezeigten Beispiel sei ein Graph G gegeben, der das Verbindungsnetzwerk einer Schaltung S repräsentiert. Abbildung 3 (links) zeigt den Graph; G ist zweifach zusammenhängend und die folgenden Abbildungen illustrieren die Schritte (5) und (6) bzw. (8) des Algorithmus.

ADAPTORS

Input. Modell einer elektrischen Schaltung.

Output. Normalisierter SPC-Baum, der die optimale Adaptorzerlegung und die Adaptortypen definiert.

- (1) Erzeuge den korrespondierenden Graphen G von S .
- (2) Zerlege G in die zweifach zusammenhängenden Komponenten $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_m\}$.
- (3) $\forall G' \in \mathcal{G}$ **do**
- (4) Überprüfe G' hinsichtlich des s - t -Zusammenhangs.
- (5) Identifiziere die dreifachen Zusammenhangskomponenten in G' .
- (6) Erzeuge den SPC-Baum für G' .
- (7) **end**
- (8) Erzeuge den normalisierten SPC-Baum $T_{\langle G, s, t \rangle}$ für den gesamten Graph G .

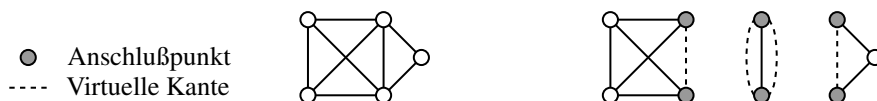


Abbildung 3: Korrespondierender Graph G einer Schaltung (links) und seine Zerlegung in dreifach zusammenhängende Komponenten (rechts).

Der SPC-Baum fungiert nicht nur als Definition der Adaptorstruktur sondern stellt auch eine ideale Basis dar, um Ingenieurwissen zum Zusammenfassen oder kontextsensitivem Ersetzen von Elementen aus S zu definieren.

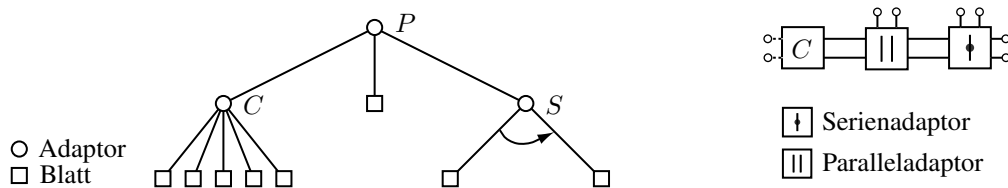


Abbildung 4: Der normalisierte SPC-Baum des Graphen G (links) und seine Darstellung als Adaptorstruktur (rechts).

Literatur

- [1] *Fettweis, A.:* Wave digital filters: Theory and practice. Proc. of the IEEE 74/2 (1986), S.270-327.
- [2] *Meerkötter, K.; Scholz, R.:* Digital simulation of nonlinear circuits by wave digital filter principles. Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems (1989), S. 720-723.
- [3] *Ochs, K.:* Passive integration methods: Fundamental theory. AEÜ Int. J. Electron. Commun. 55/3 (2001), S. 153-163.
- [4] *Ochs, K.:* Passive Integrationsmethoden. Dissertation, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Universität Paderborn (2001).
- [5] *Fränken, D.; Ochs, K.:* Wave digital simulation of nonlinear electrical networks by means of passive Runge-Kutta methods. Proceedings of the IEEE Intern. Symposium on Circuits and Systems 3 (2001), S. 469-472.
- [6] *Fränken, D.; Ochs, K.:* Numerical stability properties of passive Runge-Kutta methods Proceedings of the IEEE Intern. Symposium on Circuits and Systems 3 (2001), S. 473-476.
- [7] *Cellier, F. E.:* Continuous system modeling. New York: Springer, 1991.
- [8] *Meerkötter, K.; Fränken, D.:* Digital realization of connection networks by voltage-wave two-port adaptors. AEÜ Int. J. Electron. Commun. 50/6 (1996), S. 362-367.
- [9] *Stein, B.:* Model Construction in Analysis and Synthesis Tasks. Habilitationsschrift, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Paderborn (2001).
- [10] *Stein, B.:* Functional Models in Configuration Systems. Dissertation, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Paderborn (1995).
- [11] *Hopcroft, J. E.; Tarjan, R. E.:* Dividing a Graph into Triconnected Components. SIAM Journal of Computing (1973), S. 135-158.