Kapitel L:II

II. Aussagenlogik

- Syntax der Aussagenlogik
- Semantik der Aussagenlogik
- Eigenschaften des Folgerungsbegriffs
- Äquivalenz
- Formeltransformation
- Normalformen

- Bedeutung der Folgerung
- Erfüllbarkeitsalgorithmen
- Semantische Bäume
- Weiterentwicklung semantischer Bäume
- Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren
- Erfüllbarkeitsprobleme

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Ausgangspunkt ist die Frage: „Gilt $\alpha \models \beta$?“

Bisher wurde die Antwort auf diese Frage durch Anwendung der Folgerungsdefinition gefunden – d. h., durch Auswerten der möglichen Interpretationen.

Q. Lässt sich obige Frage auch *ohne* Rückgriff auf die Semantik, d. h. ohne Auswertung der Interpretationen beantworten?

A. Ja. Wurde für eine bestimmte Formelstruktur α festgestellt, dass $\alpha \models \beta$ gilt, so reicht in Zukunft das Identifizieren dieser Struktur aus, um die Folgerbarkeit von β zu behaupten.

Diese Überlegung führt zum Begriff der Herleitung.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Definition 25 (Schlussregel, Kalkül)

Unter einer Schlussregel versteht man ein Verfahren (einen Mechanismus, eine Vorschrift) zur Erzeugung einer neuen Formel aus vorhandenen Formeln, das sich nur an syntaktischen Eigenschaften der beteiligten Formeln orientiert.

Ein Kalkül bezeichnet eine Menge von Schlussregeln.

Idee der Herleitung

Sei $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$.

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ ist eine Herleitung von β aus α genau dann, wenn gilt:

1. $\beta_k = \beta$ und
2. für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ gilt
   (a) $\beta_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ oder
   (b) β_i wird mit einer Schlussregel hergeleitet, deren Voraussetzungen aus $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}$ stammen.

Bemerkungen:

- Eine Schlussregel definiert eine Zeichenkettenmanipulation.
- Im allgemeinen beschreibt eine Schlussregel ein Schema, das Variablen für Formeln verwendet anstelle von konkreten (aussagenlogischen) Formeln. Eine Schlussregel ist damit genauso zu handhaben wie die Äquivalenzen in der Liste der wichtigen Äquivalenzen und in der Definition zu 1-Äquivalenzen, 0-Äquivalenzen. Wenn konkrete Formeln die in der Regel verlangte Struktur aufweisen, kann die Regel angewendet werden. Die Schlussregel fasst damit die abzählbar vielen denkbaren Einzelsituationen mit konkreten Formeln zu einem Schema zusammen.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Definition 26 (Herleiten, syntaktisches Schlussfolgern)

Sei α eine Formel, die als Modell eines Weltausschnittes (= Domäne) dient. Sei β eine weitere Formel.

Die Erzeugung von β auf Basis eines Kalküls wird als Herleiten oder als syntaktisches Schlussfolgern von β bezeichnet.

In Zeichen: $\alpha \vdash \beta$

Bemerkungen:

- Man ist an Kalkülen interessiert, mit denen man Folgerungen herleiten kann.
- Wiederholung: Im Gegensatz zum *Herleiten* von β wird die Erzeugung von β auf Basis einer semantischen Analyse als *Schlussfolgern* bzw. als *semantisches Schlussfolgern* bezeichnet. In Zeichen: $\alpha \models \beta$
- Frage: Ist `DPLL-SAT` ein syntaktisches oder ein semantische Verfahren zum Schlussfolgern?

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Die Schlussregel Modus Ponens, MP (drei Schreibweisen)

Seien β und γ Formeln.

$$\frac{\begin{array}{r}\gamma \\ \gamma \;\rightarrow\; \beta\end{array}}{\beta} \qquad\qquad \frac{\gamma \;\wedge\; (\gamma \;\rightarrow\; \beta)}{\beta} \qquad\qquad \frac{\gamma,\; \gamma \;\rightarrow\; \beta}{\beta}$$

γ und $\gamma \rightarrow \beta$ sind die Voraussetzungen des MP, β die Konklusion.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Die Schlussregel Modus Ponens, MP (drei Schreibweisen)

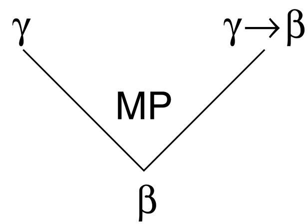
Seien β und γ Formeln.

$$\frac{\begin{array}{r}\gamma\\ \gamma \rightarrow \beta\end{array}}{\beta} \qquad\qquad \frac{\gamma \wedge (\gamma \rightarrow \beta)}{\beta} \qquad\qquad \frac{\gamma,\ \gamma \rightarrow \beta}{\beta}$$

γ und $\gamma \rightarrow \beta$ sind die Voraussetzungen des MP, β die Konklusion.

Anwendung der Schlussregel MP für die Formel $\alpha = \gamma \wedge (\gamma \rightarrow \beta)$:

- in Zeichen: $\alpha \mathrel{|\!\!\underline{\ \ }}_{MP}\, \beta$
- in Worten: „β kann mittels MP aus α hergeleitet werden.“
- als Graphik:



Bemerkungen:

- Es handelt sich um eine syntaktische Vorschrift: der MP kann angewandt werden, wenn die beschriebene Struktur vorgefunden wird.
- Falls es sich bei der hergeleiteten Formel β um eine Folgerung aus α handelt, kann β konjunktiv zu α hinzugenommen werden, wobei die logische Äquivalenz zu α erhalten bleibt: $\alpha \approx \alpha \land \beta$

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Eigenschaften von Kalkülen

Korrektheit (*Soundness*) eines Kalküls.

- Handelt es sich bei allen Formeln, die mittels einer Schlussregel herleitbar sind, um Folgerungen?
- In Zeichen: Gilt $\alpha \vdash \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \models \beta$?

Wie ist die Korrektheit einer Schlussregel nachweisbar?

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Eigenschaften von Kalkülen

Korrektheit (*Soundness*) eines Kalküls.

- Handelt es sich bei allen Formeln, die mittels einer Schlussregel herleitbar sind, um Folgerungen?
- In Zeichen: Gilt $\alpha \vdash \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \models \beta$?

Wie ist die Korrektheit einer Schlussregel nachweisbar?

Güte bzw. Vollständigkeit (*Completeness*) eines Kalküls.

- Wieviele oder welche Folgerungen sind mittels eines Kalküls herleitbar?
- In Zeichen: Gilt $\alpha \models \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \vdash \beta$?

Wie ist die Vollständigkeit eines Kalküls nachweisbar?

Definition 27 (Korrektheit, Vollständigkeit eines Kalküls)

Sei α eine Formel. Ein Kalkül (ein Verfahren zur Erzeugung von Formeln) heißt *korrekt*, wenn jede Formel β, die auf Basis des Kalküls aus α erzeugt wurde, eine Folgerung aus α ist.

Ein Kalkül heißt *vollständig*, wenn jede Formel β, die sich aus α folgern lässt, hergeleitet werden kann.

Bemerkungen:

- Mit der Korrektheit und Vollständigkeit zeigt man für einen Kalkül die *Äquivalenz von Syntax und Semantik*:

  1. Syntax $\Rightarrow$ Semantik: Jede Herleitung ist eine Folgerung.
  2. Semantik $\Rightarrow$ Syntax: Jede Folgerung lässt sich herleiten.

- Die Korrektheit kann für jede Schlussregel isoliert verifiziert werden.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Korrektheit der Schlussregel MP

(a) Zu $\alpha \models \beta$ äquivalent ist:

- $\alpha \approx \{\alpha, \beta\}$ bzw. $\alpha \wedge \beta$
- $\alpha \rightarrow \beta$ ist tautologisch
- $\{\alpha, \neg\beta\}$ bzw. $\alpha \wedge \neg\beta$ ist widerspruchsvoll
- $\ldots$

(b) Sei $\alpha = \{\gamma, \gamma \rightarrow \beta\}$. Anwendung des MP: $\alpha \mid_{\overline{MP}} \beta$

(c) Zu zeigen (eines reicht):

- $\{\gamma, \gamma \rightarrow \beta\} \approx \{\gamma, \gamma \rightarrow \beta, \beta\}$
- $(\gamma \wedge (\gamma \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$ ist tautologisch
- $\{\gamma, \gamma \rightarrow \beta, \neg\beta\}$ ist widerspruchsvoll
- $\ldots$

(d) Überprüfung aller Interpretationen mit Hilfe der Wahrheitstafel.
Ergebnis: β ist eine Folgerung aus α. Somit ist der MP eine korrekte Schlussregel.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Vollständigkeit des MP

Unter alleiniger Verwendung des MP können nicht alle Folgerungen aus einer Formel α hergeleitet werden.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Vollständigkeit des MP

Unter alleiniger Verwendung des MP können nicht alle Folgerungen aus einer Formel α hergeleitet werden.

Beispiel:

$\alpha = \{\gamma, \neg\gamma \vee \beta\}$.   Es gilt: $\alpha \models \beta$

Die Formel α bietet keine Möglichkeit, den MP anzuwenden.

Deshalb:

Hinzunahme voraussetzungsloser Schlussregeln mit denen sich nur Tautologien herleiten lassen. Beispiel (Axiom A_4):

$$\frac{\{\}}{(\neg\varphi \vee \psi) \;\rightarrow\; (\varphi \rightarrow \psi)}$$

Bemerkungen:

- Für eine Tautologie δ gilt: $\alpha \approx \{\alpha, \delta\}$ bzw. $\alpha \approx \alpha \wedge \delta$.
  [vgl. Definition 1-Äquivalenzen, 0-Äquivalenzen]

- Ziel ist es, den MP auf $\{\alpha, \delta\}$ anwenden zu können.

- Die Frege-Axiome sind Tautologien bzw. voraussetzungslose Schlussregeln aufgrund der in der Aussagenlogik eingeführten Semantik der Implikation. Dass eine Semantik vereinbart werden muss, rechtfertigt den Begriff „Axiom". Durch Hinzunahme der Frege-Axiome wird die Schlussregel MP zu einem vollständigen Kalkül, dem sogenannten Hilbert-Kalkül.

- Eine mögliche Version der Frege-Axiome des Hilbert-Kalküls:

A_1:	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \;\rightarrow\; ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$	Definition $\leftrightarrow$
A_2:	$((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \;\rightarrow\; (\varphi \leftrightarrow \psi)$	Definition $\leftrightarrow$
A_3:	$(\varphi \rightarrow \psi) \;\rightarrow\; (\neg\varphi \vee \psi)$	Definition $\rightarrow$
A_4:	$(\neg\varphi \vee \psi) \;\rightarrow\; (\varphi \rightarrow \psi)$	Definition $\rightarrow$
A_5:	$(\varphi \vee \psi) \;\rightarrow\; \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	Definition $\wedge$
A_6:	$(\varphi \wedge \psi) \;\rightarrow\; \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	Definition $\wedge$
A_7:	$(\varphi \vee \varphi) \;\rightarrow\; \varphi$	Idempotenz von $\vee$
A_8:	$\varphi \;\rightarrow\; (\varphi \vee \psi)$	Abschwächung
A_9:	$(\varphi \vee \psi) \;\rightarrow\; (\psi \vee \varphi)$	Kommutativität von $\vee$
A_{10}:	$(\varphi \rightarrow \psi) \;\rightarrow\; ((\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$	

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel: Herleitung von β aus $\alpha = \gamma \land (\neg\gamma \lor \beta)$.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel: Herleitung von β aus $\alpha = \gamma \land (\neg\gamma \lor \beta)$.

(a) Unter Anwendung des Axioms A_4 entsteht die Herleitung:
$(1)\ \gamma, \quad (2)\ \neg\gamma \lor \beta, \quad (3)\ (\neg\gamma \lor \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel: Herleitung von β aus $\alpha = \gamma \wedge (\neg\gamma \vee \beta)$.

(a) Unter Anwendung des Axioms A_4 entsteht die Herleitung:
$(1)\ \gamma, \quad (2)\ \neg\gamma \vee \beta, \quad (3)\ (\neg\gamma \vee \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$

(b) Erste Anwendung des MP:

$$\begin{array}{r} \neg\gamma \vee \beta \\ (\neg\gamma \vee \beta) \ \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta) \\ \hline \gamma \rightarrow \beta \end{array}$$

. . . führt zur Herleitung:
$(1)\ \gamma, \quad (2)\ \neg\gamma \vee \beta, \quad (3)\ (\neg\gamma \vee \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta), \quad (4)\ \gamma \rightarrow \beta$

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel: Herleitung von β aus $\alpha = \gamma \wedge (\neg\gamma \vee \beta)$.

(a) Unter Anwendung des Axioms A_4 entsteht die Herleitung:

$(1)\ \gamma, \quad (2)\ \neg\gamma \vee \beta, \quad (3)\ (\neg\gamma \vee \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$

(b) Erste Anwendung des MP:

$$\frac{\begin{array}{r}\neg\gamma \vee \beta \\ (\neg\gamma \vee \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)\end{array}}{\gamma \rightarrow \beta}$$

... führt zur Herleitung:

$(1)\ \gamma, \quad (2)\ \neg\gamma \vee \beta, \quad (3)\ (\neg\gamma \vee \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta), \quad (4)\ \gamma \rightarrow \beta$

(c) Zweite Anwendung des MP:

$$\frac{\begin{array}{r}\gamma \\ \gamma \rightarrow \beta\end{array}}{\beta}$$

... führt zur gewünschten Herleitung:

$(1)\ \gamma, \quad (2)\ \neg\gamma \vee \beta, \quad (3)\ (\neg\gamma \vee \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta), \quad (4)\ \gamma \rightarrow \beta, \quad (5)\ \beta$

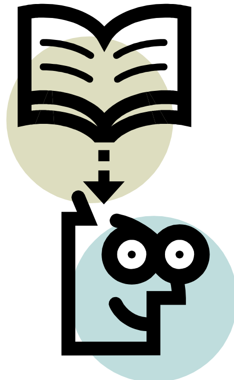
Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Weitere Schlussregeln sind denkbar – z. B. der Kettenschluss, KS:

$$\frac{\alpha \to \beta, \;\; \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$$

Der KS ist praktisch, doch er ist keine echte Erweiterung des MP, sondern nur dessen zweifache Anwendung einschließlich der Verwendung von Axiom A_{10}:

$$\dfrac{\dfrac{\beta\to\gamma \qquad \text{A10: } (\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to\beta) \to (\alpha\to\gamma))}{(\alpha\to\beta) \to (\alpha\to\gamma)}\,\text{MP} \qquad (\alpha\to\beta)}{(\alpha\to\gamma)}\,\text{MP}$$



Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Die Schlussregel Resolution (Formeln in KNF, Mengenschreibweise)

Seien α und β Klauseln mit $L \in \alpha$ und $\neg L \in \beta$.

$$\frac{\alpha \qquad\qquad\qquad \beta}{(\alpha \setminus \{L\}) \;\cup\; (\beta \setminus \{\neg L\})}$$

α und β heißen Elternklauseln, $(\alpha \setminus \{L\}) \;\cup\; (\beta \setminus \{\neg L\})$ heißt Resolvente.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Die Schlussregel Resolution (Formeln in KNF, Mengenschreibweise)

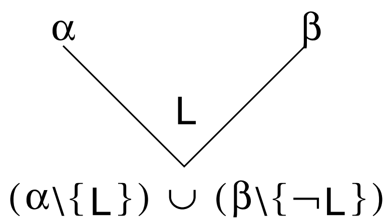
Seien α und β Klauseln mit $L \in \alpha$ und $\neg L \in \beta$.

$$\frac{\alpha \qquad\qquad\qquad \beta}{(\alpha \setminus \{L\}) \,\cup\, (\beta \setminus \{\neg L\})}$$

α und β heißen Elternklauseln, $(\alpha \setminus \{L\}) \,\cup\, (\beta \setminus \{\neg L\})$ heißt Resolvente.

Anwendung der Schlussregel Resolution für zwei Formeln α und β:

- in Zeichen: $\alpha, \beta \;\mid\!\frac{1}{Res}\; (\alpha \setminus \{L\}) \,\cup\, (\beta \setminus \{\neg L\})$
- in Worten: „$(\alpha \setminus \{L\}) \,\cup\, (\beta \setminus \{\neg L\})$ kann in einem Schritt mittels der Resolutionsregel aus α und β hergeleitet werden.“
- als Graphik:



Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Die Schlussregel Resolution

Beispiele:

$$\{A\},\ \{\neg A, B\} \mid\!\frac{1}{Res}\ \{B\}$$

$$\{\neg A, B\},\ \{\neg B\} \mid\!\frac{1}{Res}\ \{\neg A\}$$

$$\{A\},\ \{\neg A\} \mid\!\frac{1}{Res}\ \{\}$$ leere Klausel

Vereinbarung:

Die leere Klausel wird als kleinste widersprüchliche Klausel aufgefasst – in Zeichen: $A \wedge \neg A$ bzw. $\{\}$ bzw. $\sqcup$.

Die leere Klausel ist das Kennzeichen für das Vorhandensein zweier komplementärer Unit-Klauseln. Sie kann Bestandteil einer Formel oder durch eine Herleitung erzeugt sein.

Bemerkungen:

- Es handelt um eine syntaktische Vorschrift: die Resolution kann angewandt werden, wenn die beschriebene Struktur vorgefunden wird.
- Falls die Resolvente eine Folgerung der Elternklauseln ist, kann sie konjunktiv zur ihnen hinzugenommen werden, wobei die logische Äquivalenz erhalten bleibt:
  $\alpha \land \beta \;\approx\; \alpha \land \beta \land ((\alpha \setminus \{L\}) \cup (\beta \setminus \{\neg L\}))$

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Definition 28 (Resolutionskalkül)

Sei $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Formel in KNF und sei π eine Klausel.

π is mittels der Resolution aus α herleitbar, in Zeichen: $\alpha \mid\!\frac{}{Res}\, \pi$, genau dann, wenn es eine Folge von Klauseln $\pi_1, \ldots, \pi_k$ gibt mit

- $\pi_k = \pi$ und
- für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt $\pi_j \in \alpha$ oder es gibt Klauseln $\sigma_j, \tau_j \in \alpha \cup \{\pi_1, \ldots, \pi_{j-1}\}$ mit $\sigma_j, \tau_j \mid\!\frac{1}{Res}\, \pi_j$.

$\pi_1, \ldots, \pi_k$ heißt Herleitung von π aus α. Die Länge der Herleitung ist k.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Definition 28 (Resolutionskalkül)

Sei $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Formel in KNF und sei π eine Klausel.

π is mittels der Resolution aus α herleitbar, in Zeichen: $\alpha \mathrel{|\!\underline{\;\;}_{Res}} \pi$, genau dann, wenn es eine Folge von Klauseln $\pi_1, \ldots, \pi_k$ gibt mit

- $\pi_k = \pi$ und
- für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt $\pi_j \in \alpha$ oder es gibt Klauseln $\sigma_j, \tau_j \in \alpha \cup \{\pi_1, \ldots, \pi_{j-1}\}$ mit $\sigma_j, \tau_j \mathrel{|\!\frac{1}{Res}} \pi_j$.

$\pi_1, \ldots, \pi_k$ heißt Herleitung von π aus α. Die Länge der Herleitung ist k.

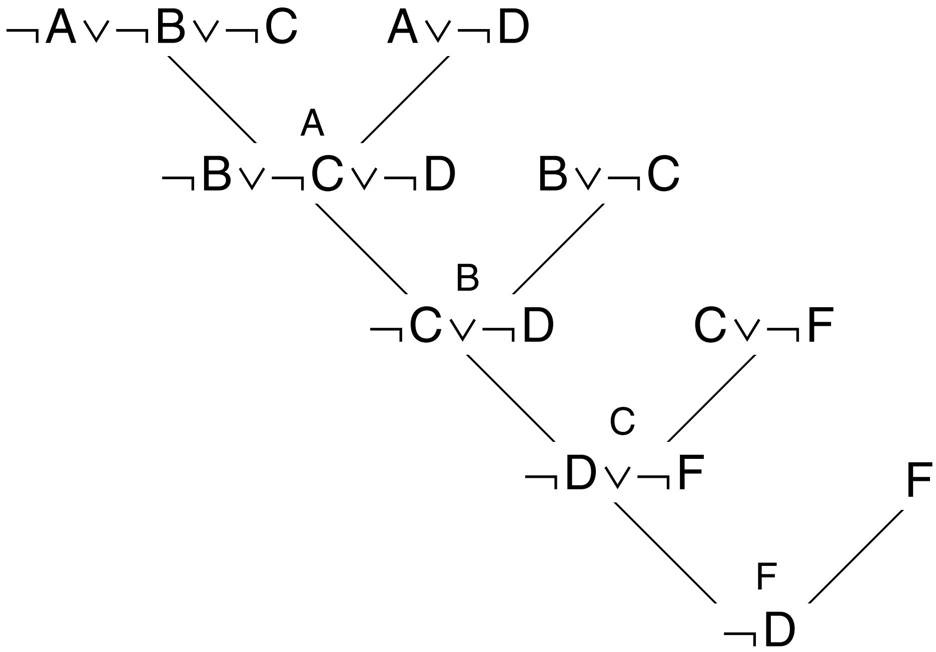
Schreibweisen:

- $\alpha \mathrel{|\!\underline{\;\;}_{Res}} \pi$
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \mathrel{|\!\underline{\;\;}_{Res}} \pi$
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \mathrel{|\!\frac{k}{Res}} \pi$
- auch: $\alpha \mathrel{|\!\underline{\;\;}_{Res}} \beta$ mit $\alpha, \beta \in$ KNF

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel (Input-Resolution).

$\alpha = \{\neg A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee \neg D, B \vee \neg C, C \vee \neg F, F\}$



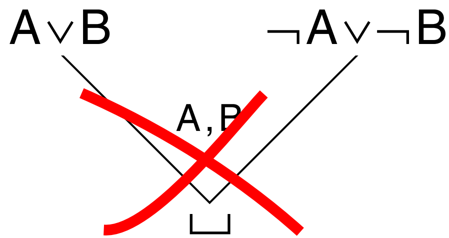
Offensichtlich gilt: $\alpha \underset{Res}{\vdash} \neg D$

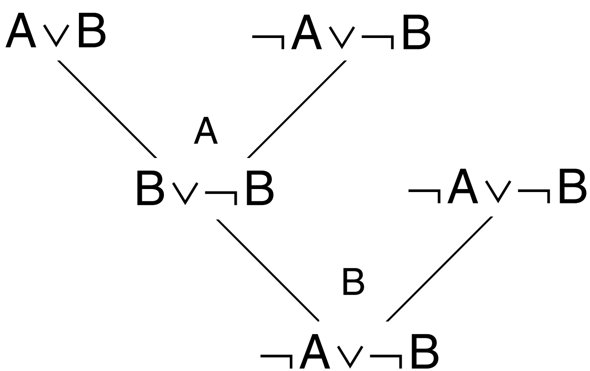
Begriff: Herleitungsbaum oder auch Beweisbaum

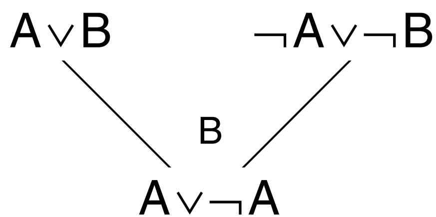
Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel.

$\alpha = \{A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$.





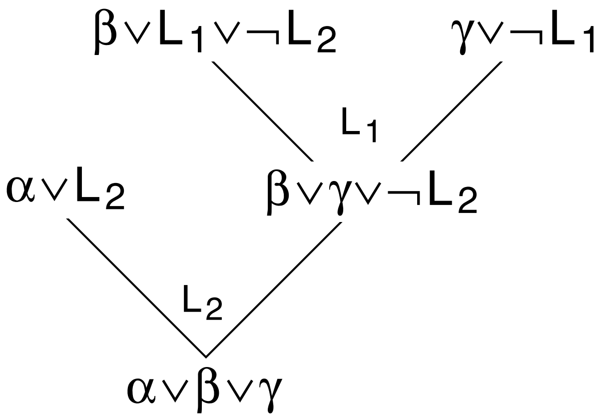


Es darf nur über ein Literal gleichzeitig resolviert werden.

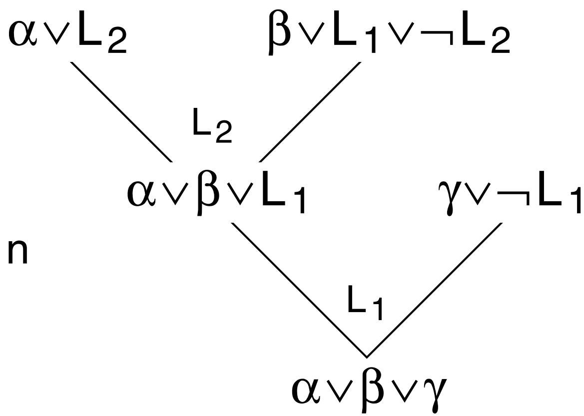
Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel (reguläre Resolution).

α, β, γ sind Klauseln ohne die Literale $L_1, \neg L_1, L_2, \neg L_2$.



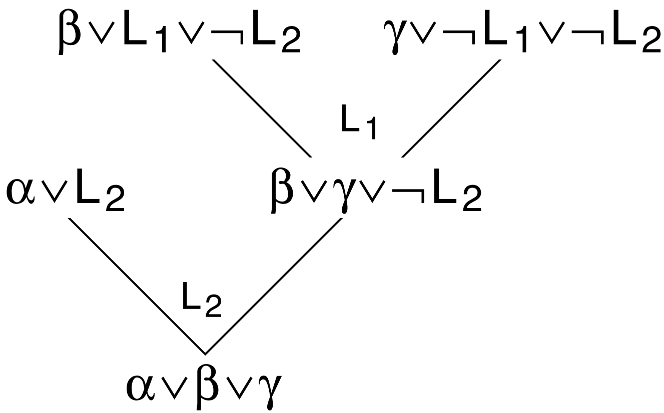
transformierbar in



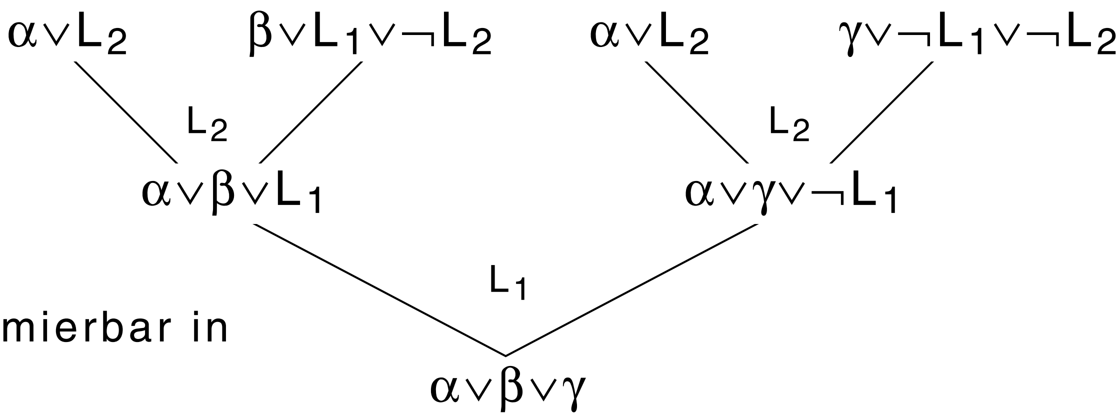
Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel (reguläre Resolution).

α, β, γ sind Klauseln ohne die Literale $L_1, \neg L_1, L_2, \neg L_2$.



transformierbar in



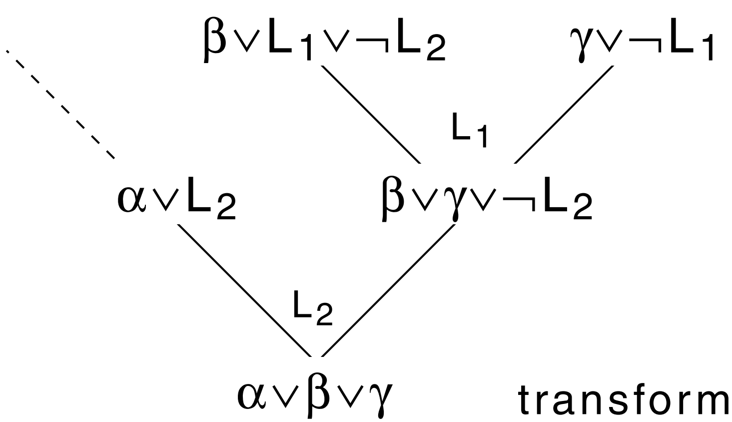
Bemerkungen:

- Der Herleitungsbaum ist immer ein DAG (*Directed Acyclic Graph*).
- Die beiden Beispiele zeigen die einzigen Möglichkeiten, über zwei Resolutionsschritte zur Klausel $\alpha \vee \beta \vee \gamma$ zu gelangen.
- Offensichtlich verhindert eine Änderung der Reihenfolge der Literale, über die resolviert wird, keine Ableitung. Also darf man Literale nach einem beliebigen Schema auswählen.
- Verschiedene Herleitungen derselben Klausel können unterschiedlich aufwendig sein.

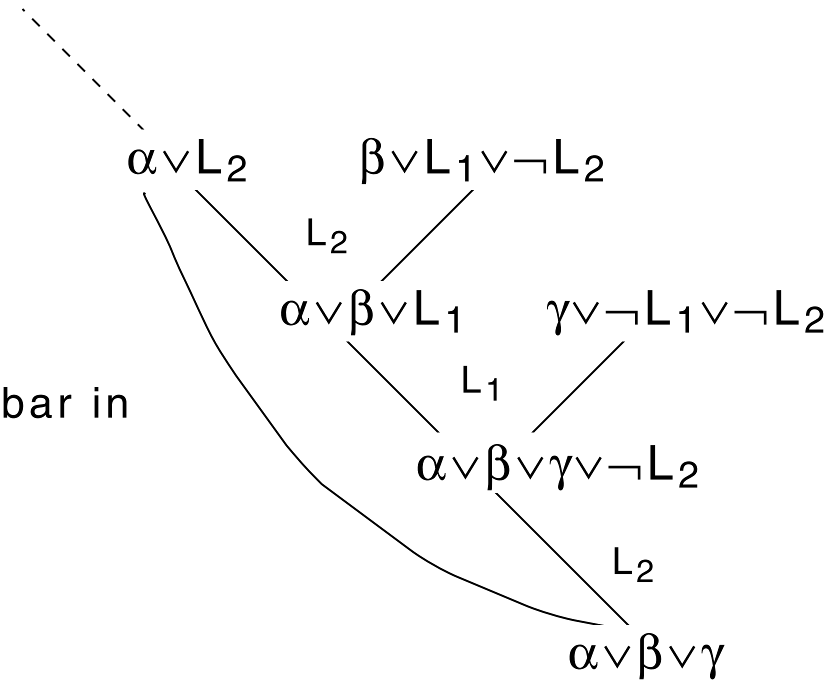
Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel (lineare Resolution immer möglich).

α, β, γ sind Klauseln ohne die Literale $L_1, \neg L_1, L_2, \neg L_2$.



transformierbar in



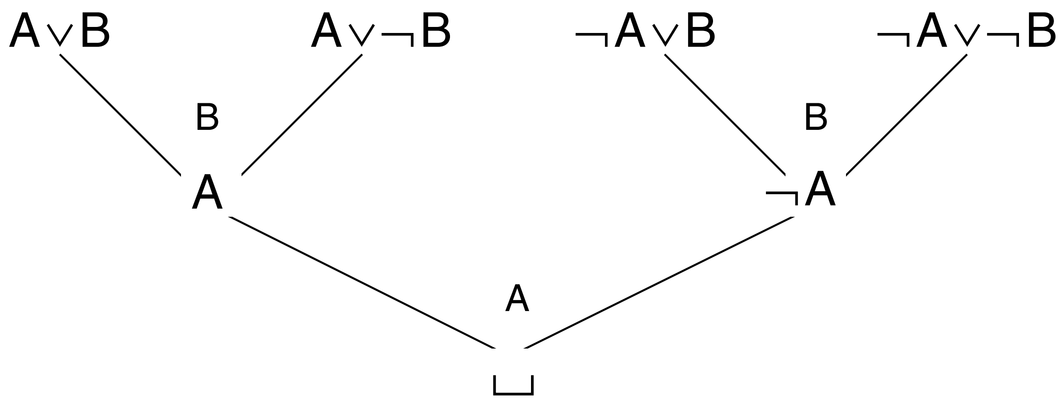
Bemerkungen:

- Der Herleitungsbaum lässt sich immer in eine kanonische Form überführen, der zu einer Seite „keine Äste“ hat.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beispiel.

$\alpha = \{A \vee B, A \vee \neg B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$



Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Satz 29 (Syntax und Semantik im Resolutionskalkül)

1. Der Resolutionskalkül ist korrekt. Sei $\alpha \in$ KNF, π eine Klausel. Dann gilt:

$$\alpha \vdash_{Res} \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha \models \pi$$

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Satz 29 (Syntax und Semantik im Resolutionskalkül)

1. Der Resolutionskalkül ist korrekt. Sei $\alpha \in$ KNF, π eine Klausel. Dann gilt:

$$\alpha \underset{Res}{\vdash} \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha \models \pi$$

2. Der Resolutionskalkül ist nicht vollständig. Es gibt ein $\alpha \in$ KNF und eine Klausel π, so dass gilt:

$$\alpha \models \pi \quad \text{aber} \quad \alpha \underset{Res}{\nvdash} \pi$$

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Satz 29 (Syntax und Semantik im Resolutionskalkül)

1. Der Resolutionskalkül ist korrekt. Sei $\alpha \in$ KNF, π eine Klausel. Dann gilt:

$$\alpha \vdash_{Res} \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha \models \pi$$

2. Der Resolutionskalkül ist nicht vollständig. Es gibt ein $\alpha \in$ KNF und eine Klausel π, so dass gilt:

$$\alpha \models \pi \quad \text{aber} \quad \alpha \not\vdash_{Res} \pi$$

3. Der Resolutionskalkül ist widerlegungsvollständig. Sei $\alpha \in$ KNF. Dann gilt:

$$\alpha \text{ widerspruchsvoll} \quad \Rightarrow \quad \alpha \vdash_{Res} \sqcup$$

Bemerkungen:

- Es gilt sogar die Äquivalenz: α widerspruchsvoll $\quad\Leftrightarrow\quad \alpha \vdash_{Res} \sqcup$

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Beweis (Skizze)

zu 1) Korrektheit.

Induktion über die Länge der Herleitung. Im Induktionsanfang zeigt man:

$$\pi_1, \pi_2 \mathrel{\mathop{\vdash}^{1}_{Res}} \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_1, \pi_2 \models \pi$$

zu 2) Unvollständigkeit.

Sei $\alpha = A,\ \pi = A \vee B$. Es gilt:

$$\alpha \models \pi \quad \text{aber} \quad \alpha \not\vdash_{Res} \pi$$

zu 3) Widerlegungsvollständigkeit.

Induktion über die Anzahl der Atome in α.

Bemerkungen:

- Zur Unvollständigkeit. Der Resolutionskalkül ermöglicht nicht die Einführung neuer Zeichen. Beachte, dass beim Hilbert-Kalkül (MP + entsprechende Axiome) die Einführung neuer Zeichen durch Axiome wie „$\varphi \;\rightarrow\; \varphi \vee \psi$“ realisiert ist.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Satz 30 (Laufzeit des Resolutionskalküls)

Der Resolutionskalkül ist exponentiell. D. h., es gibt Formeln $(\varphi_n), n \in \mathbf{N}$, und eine Konstante $c > 1$, so dass für genügend große n jede Resolutionswiderlegung (Herleitung der leeren Klausel) von φ_n mindestens c^n Klauseln enthält.

[Haken 1985]

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Satz 30 (Laufzeit des Resolutionskalküls)

Der Resolutionskalkül ist exponentiell. D. h., es gibt Formeln $(\varphi_n), n \in \mathbf{N}$, und eine Konstante $c > 1$, so dass für genügend große n jede Resolutionswiderlegung (Herleitung der leeren Klausel) von φ_n mindestens c^n Klauseln enthält.

[Haken 1985]

Beweis (Skizze)

Betrachte die Pigeon-Hole-Formeln φ_n. Gegeben sind $n+1$ Tauben, n Löcher, und in jedes Loch passt höchstens eine Taube.

Semantik von $X_{i,k}$: Taube i sitzt in Loch k.

(a) Klauseln für „Jede Taube sitzt in einem Loch“

$(X_{1,1} \vee \ldots \vee X_{1,n})$ ... $(X_{n+1,1} \vee \ldots \vee X_{n+1,n})$

(b) Klauseln für „In jedem Loch sitzt höchstens eine Taube“

$$\bigwedge_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i < j \leq n+1}} (\neg X_{i,k} \vee \neg X_{j,k})$$

(c) Bilde $\varphi_n \in$ KNF aus Klauseln von (a) und (b). $|\varphi_n| = n \cdot (n+1)^2$

Bemerkungen:

- Die Pigeon-Hole-Formeln sind ein Beispiel für den Versuch, eine injektive Abbildung von einer $(n+1)$-elementigen Menge auf eine n-elementige Menge zu konstruieren.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Die Varianten des Resolutionskalküls können als verschiedene Strategien aufgefasst werden, den Suchraum zu beschränken.

Sie lassen sich in zwei Klassen einteilen, die sich

1. auf die Struktur des Herleitungsbaums bzw.
2. auf semantische Konzepte beziehen.

Definition 31 (Inputklausel)

Eine Klausel der Anfangsformel wird auch Inputklausel genannt.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

zu 1. Varianten in der Struktur des Herleitungsbaums

(a) Reguläre Resolution.

In keiner Resolvente darf ein Literal auftreten, über das bei der Herleitung der Klausel bereits resolviert wurde.

(b) Lineare Resolution.

Für den nächsten Resolutionsschritt wird als eine der Elternklauseln die zuletzt generierte Klausel gewählt. Die andere Klausel ist eine Inputklausel oder eine beliebige, früher generierte Resolvente.

(c) Input-Resolution.

In jedem Resolutionsschritt ist eine Elternklausel eine Inputklausel.

(d) Unit-Resolution.

In jedem Resolutionsschritt ist eine Elternklausel eine Unit-Klausel.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

zu 2. Varianten semantischer Konzepte

(a) Semantische Resolution.

Gegeben sei eine Interpretation $\mathcal{I}$. In jedem Resolutionsschritt muss eine Elternklausel mit 0 bewertet sein unter $\mathcal{I}$.

Frage: Was ist, wenn beide Elternklauseln mit 0 bewertet sind?

(b) N-Resolution.

Spezialfall der semantischen Resolution mit $\mathcal{I}(A) = 1, \ \forall A \in \Sigma$. In jedem Resolutionsschritt muss eine Elternklausel mit 0 bewertet sein unter $\mathcal{I}$.

Eine mit 0 bewertete Elternklausel ist eine negative Klausel.

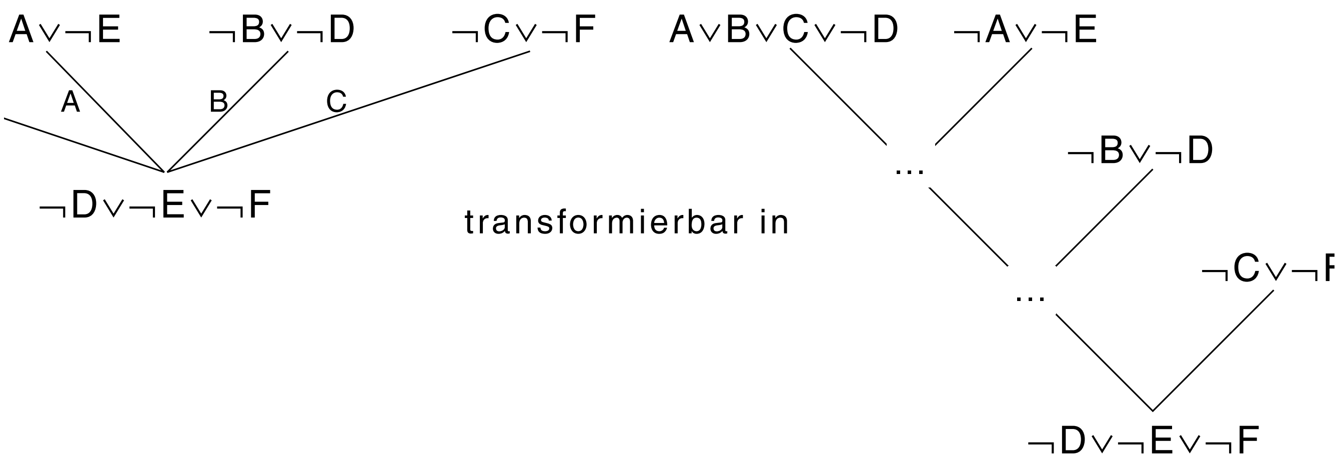
(c) P-Resolution.

Spezialfall der semantischen Resolution mit $\mathcal{I}(A) = 0, \ \forall A \in \Sigma$. In jedem Resolutionsschritt muss eine Elternklausel mit 0 bewertet sein unter $\mathcal{I}$.

Eine mit 0 bewertete Elternklausel ist eine positive Klausel.

(d) (Negative) Hyperresolution.

Ähnlich der N-Resolution. Jedoch werden hier Folgen von N-Reduktionsschritten, die eine negative Resolvente ergeben, zu einem Hyperresolutionsschritt zusammengefasst.



Bemerkungen:

- Zwischen je zwei Klauseln wird höchstens über 1 Literal resolviert.
- Bei der Hyperresolution entstehen weniger Resolventen.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

zu 2. Varianten semantischer Konzepte (Fortsetzung)

(e) Set-of-Support-Strategie

Gegeben sein $\alpha_s \subseteq \alpha$ mit α_s erfüllbar (sogenannte Stützmenge). In keinem Resolutionsschritt dürfen beide Elternklauseln aus der Stützmenge stammen.

Bemerkungen:

- Semantische Varianten des Resolutionskalküls stellen natürlich auch syntaktische Schlussfolgerungsverfahren dar. Die Verwendung des Begriffs der Semantik rührt hier daher, dass eine Interpretation $\mathcal{I}$ den Ausgangspunkt spezieller Resolutions-Herleitungen definiert.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Wichtige Resultate für Resolutionskalküle

1. Widerlegungsvollständige Strategien für Formeln $\in$ KNF.
   (a) unbeschränkte Resolution
   (b) reguläre Resolution
   (c) lineare Resolution
   (d) semantische Resolution, N/P-Resolution, Hyperresolution
   (e) Set-of-Support-Strategie

2. Widerlegungsvollständige Strategien für Formeln $\in$ HORN.
   (a) Input-Resolution
   (b) Unit-Resolution

3. Äquivalenz von Input-Resolution und Unit-Resolution.

$$\alpha \vdash_{Input-Res} \sqcup \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \vdash_{Unit-Res} \sqcup$$

4. $\alpha \vdash_{Unit-Res} \sqcup$ ist in linearer Zeit entscheidbar.

   D. h., es kann in linearer Zeit festgestellt werden, ob sich mit Hilfe der Unit-Resolution aus α die leere Klausel herleiten lässt.

   D. h., wenn $\alpha \in$ Horn, so kann in linearer Zeit festgestellt werden, ob α widerspruchsvoll ist.

Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren

Zusammenfassung

Ein Kalkül erweitert eine Logik um den syntaktischen Begriff des Ableitens, der den semantischen Folgerungsbegriff nachbilden soll.

Kalküle in der Logik sind Mechanismen, um Folgerungen zu erzeugen, ohne dass die Folgerungsdefinition (Analyse aller Interpretationen) bemüht werden muss. Ein Kalkül besteht aus einer festen Menge von Schlussregeln.

Die Überprüfung, ob mittels der Schlussregeln eines Kalküls tatsächlich nur Folgerungen erzeugt werden (= Korrektheit) und ob der Kalkül in der Lage ist, alle Folgerungen zu erzeugen (= Vollständigkeit), muss einmal bewiesen und braucht dann nicht mehr in Frage gestellt zu werden.

Deshalb ist eine rein syntaktische Anwendung möglich.

