Kapitel L:II

II. Aussagenlogik

- ❑ Syntax der Aussagenlogik
- ❑ Semantik der Aussagenlogik
- ❑ Eigenschaften des Folgerungsbegriffs
- ❑ Äquivalenz
- ❑ Formeltransformation
- ❑ Normalformen

- ❑ Bedeutung der Folgerung
- ❑ Erfüllbarkeitsalgorithmen
- ❑ Semantische Bäume
- ❑ Weiterentwicklung semantischer Bäume
- ❑ Syntaktische Schlussfolgerungsverfahren
- ❑ Erfüllbarkeitsprobleme

Syntax der Aussagenlogik

Definition 1 (Sprache der Aussagenlogik)

Die Sprache der Aussagenlogik besteht aus $\Sigma = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$, einer abzählbar unendlichen Menge von Atomen und folgenden Hilfszeichen:

$\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$	Junktoren
$($, $)$	Klammern

Definition 2 (aussagenlogische Formeln über Σ)

1. Primformel.
   Jedes Atom aus Σ ist eine Formel.

2. logisches Nicht.
   Ist α eine Formel, so auch $(\neg\alpha)$.

3. logisches Und, logisches Oder.
   Sind α und β Formeln, so sind es auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$.

4. logische Implikation, logische Äquivalenz.
   Sind α und β Formeln, so sind es auch $(\alpha \rightarrow \beta)$ und $(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

5. Nur die mittels (1) - (4) gebildeten Ausdrücke sind Formeln.

Bemerkungen:

- Im allgemeinen Fall beschreibt Σ eine Signatur mit einer Menge von Sorten und einer Menge von Operationen auf diesen Sorten. Die Signatur bezeichnet die Stelligkeit, die Reihenfolge und die Typen der Argumente einer Funktion. Eine Sorte bzw. Grundbereich ist eine Menge von zulässigen Werten für ein Argument einer Funktion.

- Es handelt sich bei der Menge der Formeln um eine induktiv definierte Menge (Sprachgebrauch auch: rekursive Definition). Neue Elemente werden aus bereits bekannten nach einem festgelegtenen Konstruktionsschema aufgebaut.

- Klammern gehören zur Formel; sie machen ihre Struktur eindeutig. Klammern werden nur aufgrund von Einsparungsregeln nicht mehr angegeben.

- Beispiele:

  $\Sigma = \{A, B, C, \ldots, P, Q, R, \ldots, A_0, A_1, A_2, \ldots\}$

Formeln:	keine Formeln:
A	(A)
$(\neg A)$	$(A \vee B))$
$((\neg A) \vee B)$	$(A \neg \vee B)$
$(R \wedge (\neg Q))$	$(\wedge Q)$
$(P \wedge (Q \wedge R))$	(PQ)

Syntax der Aussagenlogik

Vereinbarungen:

1. Σ wird nicht mehr explizit festgelegt.
2. $A, B, C, \ldots, P, Q, R, \ldots, A_0, A_1, A_2, \ldots$ bezeichnen Atome.
3. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varphi, \psi, \pi, \ldots, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bezeichnen Formeln.
4. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varphi, \psi, \pi, \ldots, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ werden auch als Platzhalter zur Beschreibung von Formeln bestimmter Struktur verwendet.

Beispiele:

$(\varphi \rightarrow \varphi)$
$(\varphi \rightarrow A)$
$(B \rightarrow \varphi)$
$((\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow ((\neg\varphi) \vee \psi))$
$((\varphi \vee \varphi) \rightarrow \varphi)$
$(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \varphi))$

Syntax der Aussagenlogik

Definition 3 (*atoms*(α))

Die Funktion *atoms*(α) bezeichnet die Menge der in α vorkommenden Atome und ist wie folgt definiert.

1. *atoms*$(A) := \{A\}$
2. *atoms*$(\neg\alpha) :=$ *atoms*(α)
3. *atoms*$(\alpha \vee \beta) =$ *atoms*$(\alpha \wedge \beta) :=$ *atoms*$(\alpha) \cup$ *atoms*(β)
4. *atoms*$(\alpha \rightarrow \beta) =$ *atoms*$(\alpha \leftrightarrow \beta) :=$ *atoms*$(\alpha) \cup$ *atoms*(β)

Die Funktion *atoms*(α) ist endlich; es gilt *atoms*$(\alpha) \subseteq \Sigma$.

Syntax der Aussagenlogik

- Bindungsstärke:
  1. $\neg$ bindet stärker als $\wedge$.
  2. $\wedge$ bindet stärker als $\vee$.
  3. $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$

- Klammereinsparung:
  1. $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ werden als linksgeklammert angesehen.
  2. $\neg$ wird als rechtsgeklammert angesehen.
  3. $\rightarrow$ muss immer geklammert werden.

- Mengenschreibweise:
  $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ soll verstanden werden als $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \ldots$

Bemerkungen:

- In der Mengenschreibweise kann die Menge unendlich viele Formeln enthalten; eine Formel kann aber nur aus endlich vielen Teilformeln bestehen. Mengenschreibweise und Konjunktion von Formeln sind also nicht gleichwertige Alternativen, unter denen wir wählen können. Stichwort: Herbrand-Expansion

- $\land$, $\lor$, $\leftrightarrow$ sind assoziativ; $\rightarrow$ ist nicht assoziativ (wird später gezeigt).

- Im Zweifelsfall immer Klammern verwenden, z. B. zur Gruppierung von Aussagen in Äquivalenzen.

- Beispiele:

  $(\neg((A \lor (\neg B)) \land ((\neg A) \lor ((\neg B) \land (\neg(\neg C))))))$ lässt sich schreiben als
  $\neg((A \lor \neg B) \land (\neg A \lor (\neg B \land \neg\neg C)))$

  $((((\neg A) \lor B) \lor D) \lor (\neg E))$ lässt sich schreiben als
  $\neg A \lor B \lor D \lor \neg E$

Syntax der Aussagenlogik

Definition 4 (Formellänge $|\alpha|$)

Die Funktion $|\alpha|$ zählt die Anzahl der Symbole in α und ist wie folgt definiert.

1. $|A|_1 := 1$
2. $|(\neg\alpha)|_1 := |\alpha|_1 + 3$
3. $|(\alpha \wedge \beta)|_1 = |(\alpha \vee \beta)|_1 := |\alpha|_1 + |\beta|_1 + 3$
4. $|(\alpha \rightarrow \beta)|_1 = |(\alpha \leftrightarrow \beta)|_1 := |\alpha|_1 + |\beta|_1 + 3$

Vergröberung:

- ❑ $|\alpha|_2$ zählt nur die tatsächlich gesetzten Klammern.
- ❑ $|\alpha|_3$ zählt keine Klammern.

Beispiele:

$|\neg(\neg A \vee \neg B)|_1 =$

$|\neg(\neg A \vee \neg B)|_2 =$

$|\neg(\neg A \vee \neg B)|_3 =$

Syntax der Aussagenlogik

Definition 4 (Formellänge $|\alpha|$)

Die Funktion $|\alpha|$ zählt die Anzahl der Symbole in α und ist wie folgt definiert.

1. $|A|_1 := 1$
2. $|(\neg\alpha)|_1 := |\alpha|_1 + 3$
3. $|(\alpha \wedge \beta)|_1 = |(\alpha \vee \beta)|_1 := |\alpha|_1 + |\beta|_1 + 3$
4. $|(\alpha \rightarrow \beta)|_1 = |(\alpha \leftrightarrow \beta)|_1 := |\alpha|_1 + |\beta|_1 + 3$

Vergröberung:

- $|\alpha|_2$ zählt nur die tatsächlich gesetzten Klammern.
- $|\alpha|_3$ zählt keine Klammern.

Beispiele:

$|\neg(\neg A \vee \neg B)|_1 = 14$

$|\neg(\neg A \vee \neg B)|_2 = 8$

$|\neg(\neg A \vee \neg B)|_3 = 6$

Semantik der Aussagenlogik

Definition 5 (Bewertung, Interpretation)

Sei Σ ein Vorrat von Atomen. Eine Abbildung

$$\mathcal{I} : \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$$

heißt Bewertung oder Interpretation der Atome in Σ.

Bemerkungen:

- Atome werden unabhängig voneinander bewertet. Die Bewertung eines Atoms hängt nicht von der Bewertung anderer Atome ab.
- Zweiwertigkeits- oder Bivalenzprinzip, Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Atome können nur die Wahrheitswerte *wahr „1“* oder *falsch „0“* annehmen.
- Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: Atome können *nur einen* Wahrheitswert erhalten.
- Angenommen, das Atom A stehe für die Aussage *„Es regnet“*.
  Die Semantik von A besteht in der Zuordnung des Wertes „0“ oder „1“ zu A.
  Wir verknüpfen mit dem Wert „0“ den Sachverhalt, dass die Aussage, für die A steht, falsch ist. Mit dem Wert „1“ verknüpfen wir den Sachverhalt, dass die Aussage, für die A steht, wahr ist.
- Die „wahre“ Semantik von A ist die Semantik der Realität. Sie muss nicht mit der durch $\mathcal{I}$ festgelegten Semantik übereinstimmen.

  $\mathcal{I}$ definiert die Semantik einer *Modellwelt.*

  „$\mathcal{I}(A) = 1$“ heißt, es regnet in unserer Modellwelt bzw. in unserem Modell.
- Die Semantik der Realität ist die in einer Gemeinschaft akzeptierte Zuordnung von Symbolen zu wahrgenommenen Objekten (Pragmatik). Z. B. ist die Semantik von *„Es regnet“*, dass gerade Wasser aus Wolken vom Himmel fällt.

Semantik der Aussagenlogik

Definition 6 (Bewertung aussagenlogischer Formeln)

Sei $\mathcal{I}$ eine Bewertung der Atome in Σ. Die Erweiterung von $\mathcal{I}$ mit

$$\mathcal{I} : \{\alpha \mid \alpha \text{ aussagenlogische Formel über } \Sigma\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

gemäß folgender Vereinbarungen heißt Bewertung der aussagenlogischen Formeln über Σ.

- $\mathcal{I}(\neg\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

	$\neg$	
α	0	1
	1	0

- $\mathcal{I}(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(\beta) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

	$\wedge$	β	0	1
α	0		0	0
	1		0	1

- $\mathcal{I}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = 1 \text{ oder } \mathcal{I}(\beta) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

	$\vee$	β	0	1
α	0		0	1
	1		1	1

Semantik der Aussagenlogik

Definition 6 (Bewertung aussagenlogischer Formeln (Fortsetzung))

- $\mathcal{I}(\alpha \rightarrow \beta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = 0 \text{ oder } \mathcal{I}(\beta) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\rightarrow$	β	0	1
α	0	1	1
	1	0	1

- $\mathcal{I}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(\beta) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\leftrightarrow$	β	0	1
α	0	1	0
	1	0	1

Bemerkungen:

- Für die Bewertung von Formeln werden nur die Bewertungen der Atome benötigt, die auch in der Formel vorkommen. Stichwort: Koinzidenztheorem

  Beispiele:

  1. $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
     $\mathcal{I}(A) = 0, \quad \mathcal{I}(B) = 1, \quad \mathcal{I}$ sonst beliebig. $\quad \mathcal{I}(\alpha) =$

  2. $\beta = A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge C$
     $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B) = \mathcal{I}(C) = 1. \quad \mathcal{I}(\beta) =$

  3. $\gamma = A \vee \neg A$
     $\mathcal{I}(A) = 1. \quad \mathcal{I}(\gamma) =$

  4. $\delta = A \wedge \neg A$
     $\mathcal{I}(A) = 1. \quad \mathcal{I}(\delta) =$

- Die Junktoren der Aussagenlogik haben die folgende wichtige Eigenschaft: Die Bewertung der Atome, die in der Formel vorkommen, legen den Wahrheitswert der Formel eindeutig fest. Solche Junktoren bezeichnet man als *extensionale* Junktoren; *intensionale* Junktoren legen den Wahrheitswert nicht fest. In dem Satz „A hat eine Freundin gefunden, weil er ein teures Parfum benutzt." ist der Wahrheitswert der Gesamtaussage nicht abhängig von den Wahrheitswerten der Teilaussagen.

Semantik der Aussagenlogik

Die Formalisierung von Aussagen über die Realität mittels der Sprache der Aussagenlogik geschieht auf Basis der Semantik (= Interpretation) der Junktoren.

Beispiele:

Aussage	**Formalisierung**
„Es regnet.“	A
„Die Straße ist nass.“	B

„Es regnet“ nicht.

„Es regnet“ oder „die Straße ist nass.“

„Es regnet“ und „die Straße ist nass.“

[Immer] Wenn „es regnet“, „ist die Straße nass.“

Nur wenn „es regnet“, „ist die Straße [auch mal] nass.“

„Die Straße ist nass“ nur dann, wenn „es regnet.“

Genau dann, wenn „es regnet“, „ist die Straße nass.“

„Die Straße ist nass“ genau dann, wenn „es regnet.“

„Die Straße ist nass“ dann und nur dann, wenn „es regnet.“

Semantik der Aussagenlogik

Die Formalisierung von Aussagen über die Realität mittels der Sprache der Aussagenlogik geschieht auf Basis der Semantik (= Interpretation) der Junktoren.

Beispiele:

Aussage	**Formalisierung**
„Es regnet.“	A
„Die Straße ist nass.“	B
„Es regnet“ nicht.	$\neg A$
„Es regnet“ oder „die Straße ist nass.“	$A \vee B$
„Es regnet“ und „die Straße ist nass.“	$A \wedge B$
[Immer] Wenn „es regnet“, „ist die Straße nass.“	
Nur wenn „es regnet“, „ist die Straße [auch mal] nass.“	
„Die Straße ist nass“ nur dann, wenn „es regnet.“	
Genau dann, wenn „es regnet“, „ist die Straße nass.“	
„Die Straße ist nass“ genau dann, wenn „es regnet.“	
„Die Straße ist nass“ dann und nur dann, wenn „es regnet.“	

Semantik der Aussagenlogik

Die Formalisierung von Aussagen über die Realität mittels der Sprache der Aussagenlogik geschieht auf Basis der Semantik (= Interpretation) der Junktoren.

Beispiele:

Aussage	**Formalisierung**
„Es regnet.“	A
„Die Straße ist nass.“	B
„Es regnet“ nicht.	$\neg A$
„Es regnet“ oder „die Straße ist nass.“	$A \lor B$
„Es regnet“ und „die Straße ist nass.“	$A \land B$
[Immer] Wenn „es regnet“, „ist die Straße nass.“	$A \rightarrow B$
Nur wenn „es regnet“, „ist die Straße [auch mal] nass.“	
„Die Straße ist nass“ nur dann, wenn „es regnet.“	
Genau dann, wenn „es regnet“, „ist die Straße nass.“	
„Die Straße ist nass“ genau dann, wenn „es regnet.“	
„Die Straße ist nass“ dann und nur dann, wenn „es regnet.“	

Semantik der Aussagenlogik

Die Formalisierung von Aussagen über die Realität mittels der Sprache der Aussagenlogik geschieht auf Basis der Semantik (= Interpretation) der Junktoren.

Beispiele:

Aussage	**Formalisierung**
„Es regnet.“	A
„Die Straße ist nass.“	B
„Es regnet“ nicht.	$\neg A$
„Es regnet“ oder „die Straße ist nass.“	$A \vee B$
„Es regnet“ und „die Straße ist nass.“	$A \wedge B$
[Immer] Wenn „es regnet“, „ist die Straße nass.“	$A \rightarrow B$
Nur wenn „es regnet“, „ist die Straße [auch mal] nass.“	$B \rightarrow A$
„Die Straße ist nass“ nur dann, wenn „es regnet.“	$B \rightarrow A$
Genau dann, wenn „es regnet“, „ist die Straße nass.“	
„Die Straße ist nass“ genau dann, wenn „es regnet.“	
„Die Straße ist nass“ dann und nur dann, wenn „es regnet.“	

Unser Sprachgefühl stimmt nicht immer mit der Formalisierung überein.

Semantik der Aussagenlogik

Die Formalisierung von Aussagen über die Realität mittels der Sprache der Aussagenlogik geschieht auf Basis der Semantik (= Interpretation) der Junktoren.

Beispiele:

Aussage	**Formalisierung**
„Es regnet."	A
„Die Straße ist nass."	B
„Es regnet" nicht.	$\neg A$
„Es regnet" oder „die Straße ist nass."	$A \vee B$
„Es regnet" und „die Straße ist nass."	$A \wedge B$
[Immer] Wenn „es regnet", „ist die Straße nass."	$A \rightarrow B$
Nur wenn „es regnet", „ist die Straße [auch mal] nass."	$B \rightarrow A$
„Die Straße ist nass" nur dann, wenn „es regnet."	$B \rightarrow A$
Genau dann, wenn „es regnet", „ist die Straße nass."	$A \leftrightarrow B$
„Die Straße ist nass" genau dann, wenn „es regnet."	$A \leftrightarrow B$
„Die Straße ist nass" dann und nur dann, wenn „es regnet."	$A \leftrightarrow B$

Unser Sprachgefühl stimmt nicht immer mit der Formalisierung überein.

Semantik der Aussagenlogik

Satz 7 (Koinzidenztheorem)

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ zwei Interpretationen für Σ und es gelte für alle Atome A in *atoms*(α) einer aussagenlogischen Formel α:

$$\mathcal{I}_1(A) = \mathcal{I}_2(A), \quad \text{dann gilt auch:} \quad \mathcal{I}_1(\alpha) = \mathcal{I}_2(\alpha)$$

Beweis (Skizze)

Durch Induktion über den Formelaufbau einer Formel α.

Bemerkungen:

- Rechtfertigung des Koinzidenztheorems:
  Beachte dass α bzgl. *atoms*$(\alpha) \subseteq \Sigma$ definiert ist, $\mathcal{I}$ bzgl. Σ.

- Bestimmung aller Wahrheitswerte von α:
  1. Betrachte die Menge aller möglichen Interpretationen.
  2. Fasse jeweils alle Interpretation $\mathcal{I}$ zu einer Klasse zusammen, die bzgl. der Atome in α identisch sind. Dies entspricht einer Einschränkung der $\mathcal{I}$ auf *atoms*(α) bzw. der Projektion auf *atoms*(α).
     Begründung: Die Bewertung von α hängt nur von der Bewertung der in α vorkommenden Atome ab.
  3. Wähle (beliebig) aus jeder Klasse eine Interpretation. Offensichtlich ist der Wahrheitswert von α bestimmbar und es gilt:
     - Es gibt pro Atom 2 Wahrheitswerte.
     - $|$*atoms*$(\alpha)| = n \leadsto 2^n$ Klassen von Interpretationen
     - Systematische Aufzählung in Tabellenform $\leadsto$ Wahrheitstafel

Semantik der Aussagenlogik

Definition 8 (Wahrheitstafel)

Sei α eine aussagenlogische Formel mit $|\mathit{atoms}(\alpha)| = n$.

Die Tabelle mit den 2^n möglichen Bewertungen der Atome von α und den zugehörigen Bewertungen von α heißt Wahrheitstafel für α.

Beispiel:

$\alpha = (A \vee B) \wedge \neg C$

A	B	C	$\neg C$	$A \vee B$	α
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Semantik der Aussagenlogik

Definition 8 (Wahrheitstafel)

Sei α eine aussagenlogische Formel mit $|\textit{atoms}(\alpha)| = n$.

Die Tabelle mit den 2^n möglichen Bewertungen der Atome von α und den zugehörigen Bewertungen von α heißt Wahrheitstafel für α.

Beispiel:

$\alpha = (A \vee B) \wedge \neg C$

A	B	C	$\neg C$	$A \vee B$	α
0	0	0	1	0	0
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Semantik der Aussagenlogik

Definition 8 (Wahrheitstafel)

Sei α eine aussagenlogische Formel mit $|\mathit{atoms}(\alpha)| = n$.

Die Tabelle mit den 2^n möglichen Bewertungen der Atome von α und den zugehörigen Bewertungen von α heißt Wahrheitstafel für α.

Beispiel:

$\alpha = (A \vee B) \wedge \neg C$

A	B	C	$\neg C$	$A \vee B$	α
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Semantik der Aussagenlogik

Definition 8 (Wahrheitstafel)

Sei α eine aussagenlogische Formel mit $|\textit{atoms}(\alpha)| = n$.

Die Tabelle mit den 2^n möglichen Bewertungen der Atome von α und den zugehörigen Bewertungen von α heißt Wahrheitstafel für α.

Beispiel:

$\alpha = (A \vee B) \wedge \neg C$

A	B	C	$\neg C$	$A \vee B$	α
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Semantik der Aussagenlogik

Definition 8 (Wahrheitstafel)

Sei α eine aussagenlogische Formel mit $|\textit{atoms}(\alpha)| = n$.

Die Tabelle mit den 2^n möglichen Bewertungen der Atome von α und den zugehörigen Bewertungen von α heißt Wahrheitstafel für α.

Beispiel:

$\alpha = (A \vee B) \wedge \neg C$

A	B	C	$\neg C$	$A \vee B$	α
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Semantik der Aussagenlogik

Definition 9 (Erfüllbarkeitsbegriffe)

Sei α eine aussagenlogische Formel. Dann seien folgende Erfüllbarkeitsbegriffe vereinbart.

1. α erfüllbar genau dann, wenn es ein $\mathcal{I}$ gibt mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.
2. α falsifizierbar genau dann, wenn es ein $\mathcal{I}$ gibt mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.
3. α tautologisch genau dann, wenn für alle $\mathcal{I}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.
4. α widerspruchsvoll genau dann, wenn für alle $\mathcal{I}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.

Beispiele:

	erfüllbar	falsifizierbar	tautologisch	widerspruchsvoll
$\alpha = A \land \neg A$				
$\alpha = A \lor \neg A$				
$\alpha = A$				

Semantik der Aussagenlogik

Definition 9 (Erfüllbarkeitsbegriffe)

Sei α eine aussagenlogische Formel. Dann seien folgende Erfüllbarkeitsbegriffe vereinbart.

1. α erfüllbar genau dann, wenn es ein $\mathcal{I}$ gibt mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.
2. α falsifizierbar genau dann, wenn es ein $\mathcal{I}$ gibt mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.
3. α tautologisch genau dann, wenn für alle $\mathcal{I}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.
4. α widerspruchsvoll genau dann, wenn für alle $\mathcal{I}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.

Beispiele:

	erfüllbar	falsifizierbar	tautologisch	widerspruchsvoll
$\alpha = A \wedge \neg A$	nein	ja	nein	ja
$\alpha = A \vee \neg A$				
$\alpha = A$				

Semantik der Aussagenlogik

Definition 9 (Erfüllbarkeitsbegriffe)

Sei α eine aussagenlogische Formel. Dann seien folgende Erfüllbarkeitsbegriffe vereinbart.

1. α erfüllbar genau dann, wenn es ein $\mathcal{I}$ gibt mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.
2. α falsifizierbar genau dann, wenn es ein $\mathcal{I}$ gibt mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.
3. α tautologisch genau dann, wenn für alle $\mathcal{I}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.
4. α widerspruchsvoll genau dann, wenn für alle $\mathcal{I}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.

Beispiele:

	erfüllbar	falsifizierbar	tautologisch	widerspruchsvoll
$\alpha = A \wedge \neg A$	nein	ja	nein	ja
$\alpha = A \vee \neg A$	ja	nein	ja	nein
$\alpha = A$				

Semantik der Aussagenlogik

Definition 9 (Erfüllbarkeitsbegriffe)

Sei α eine aussagenlogische Formel. Dann seien folgende Erfüllbarkeitsbegriffe vereinbart.

1. α erfüllbar genau dann, wenn es ein $\mathcal{I}$ gibt mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.
2. α falsifizierbar genau dann, wenn es ein $\mathcal{I}$ gibt mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.
3. α tautologisch genau dann, wenn für alle $\mathcal{I}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.
4. α widerspruchsvoll genau dann, wenn für alle $\mathcal{I}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.

Beispiele:

	erfüllbar	falsifizierbar	tautologisch	widerspruchsvoll
$\alpha = A \wedge \neg A$	nein	ja	nein	ja
$\alpha = A \vee \neg A$	ja	nein	ja	nein
$\alpha = A$	ja	ja	nein	nein

Bemerkungen:

- Die Eigenschaften gehören jeweils paarweise zusammen: die Erfüllbarkeit ist die Verneinung der Widersprüchlichkeit, die Falsifizierbarkeit ist die Verneinung der Tautologie-Eigenschaft.
- Für jede aussagenlogische (und auch prädikatenlogische) Formel gelten genau zwei der gerade definierten Eigenschaften *erfüllbar, falsifizierbar, tautologisch* und *widerspruchsvoll*.
- Es gibt dafür wie im vorstehenden Beispiel genau drei Möglichkeiten. Die vierte Möglichkeit, dass eine Formel gleichzeitig tautologisch und widerspruchsvoll sein kann (d.h. damit auch nicht erfüllbar und nicht falsifizierbar) tritt nicht auf, da jede Formel nur einen der beiden Wahrheitswerte haben kann (Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch).

Semantik der Aussagenlogik

Satz 10 (Erfüllbarkeitsbegriffe)

Für eine aussagenlogische Formel α gilt:

$$
\begin{array}{rrl}
 & \alpha & \text{widerspruchsvoll} \\
\Leftrightarrow & \neg\alpha & \text{tautologisch} \\
\Leftrightarrow & \alpha & \text{nicht erfüllbar} \\
\Leftrightarrow & \neg\alpha & \text{nicht falsifizierbar}
\end{array}
$$

Semantik der Aussagenlogik

Definition 11 (Semantische Folgerung)

Seien α und β aussagenlogische Formeln. β ist semantische Folgerung aus α, in Zeichen: $\alpha \models \beta$, genau dann, wenn für alle Bewertungen $\mathcal{I}$ gilt:

$$\text{Ist } \mathcal{I}(\alpha) = 1, \text{ so ist auch } \mathcal{I}(\beta) = 1$$

Das bedeutet: α und β hängen in ihrem Aufbau derart zusammen, dass jede Bewertung $\mathcal{I}$ der Atome, die eine Bewertung $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ bewirkt, zwangsläufig mit einer Bewertung $\mathcal{I}(\beta) = 1$ einhergeht.

Semantik der Aussagenlogik

Definition 11 (Semantische Folgerung)

Seien α und β aussagenlogische Formeln. β ist semantische Folgerung aus α, in Zeichen: $\alpha \models \beta$, genau dann, wenn für alle Bewertungen $\mathcal{I}$ gilt:

$$\text{Ist } \mathcal{I}(\alpha) = 1, \text{ so ist auch } \mathcal{I}(\beta) = 1$$

Das bedeutet: α und β hängen in ihrem Aufbau derart zusammen, dass jede Bewertung $\mathcal{I}$ der Atome, die eine Bewertung $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ bewirkt, zwangsläufig mit einer Bewertung $\mathcal{I}(\beta) = 1$ einhergeht.

Beispiel:

$\alpha = A \wedge (\neg A \vee B), \quad \beta = B$ Gilt $\alpha \models \beta$?

A	B	α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Semantik der Aussagenlogik

Definition 11 (Semantische Folgerung)

Seien α und β aussagenlogische Formeln. β ist semantische Folgerung aus α, in Zeichen: $\alpha \models \beta$, genau dann, wenn für alle Bewertungen $\mathcal{I}$ gilt:

$$\text{Ist } \mathcal{I}(\alpha) = 1, \text{ so ist auch } \mathcal{I}(\beta) = 1$$

Das bedeutet: α und β hängen in ihrem Aufbau derart zusammen, dass jede Bewertung $\mathcal{I}$ der Atome, die eine Bewertung $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ bewirkt, zwangsläufig mit einer Bewertung $\mathcal{I}(\beta) = 1$ einhergeht.

Beispiel:

$\alpha = A \wedge (\neg A \vee B), \quad \beta = B$ Gilt $\alpha \models \beta$?

A	B	α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Semantik der Aussagenlogik

Zeichen der Objektsprache

$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ sind Junktoren. Ein Junktor verbindet zwei Formeln zu einer neuen Formel.

Insbesondere *definiert* – im Sinne von berechnet – ein Junktor für eine gegebene Funktion $\mathcal{I}$ (Bewertung oder Interpretation genannt) den Wert der Funktion $\mathcal{I}$ der neuen Formel. Die Berechnung geschieht auf Grundlage der $\mathcal{I}$-Werte derjenigen Formeln, zwischen denen der Junktor steht.

Semantik der Aussagenlogik

Zeichen der Metasprache

- $\models$ Semantisches (Formel-)Folgerungszeichen. Die rechte Seite folgt aus der linken; beide Seiten sind Formeln.

- $\Rightarrow$ Semantisches (Aussagen-)Folgerungszeichen. Die rechte Seite folgt aus der linken; die Seiten müssen Aussagen sein.

  Beachte, dass der Begriff „Folgerung“ sowohl für die rechte Seite als auch für den gesamten Ausdruck verwendet wird. Eine Folgerung – als gesamter Ausdruck gesehen – macht eine Aussage bzw. stellt eine Behauptung auf hinsichtlich *aller* Interpretationen der rechten und der linken Seite.
  D. h., das $\models$-Zeichen stellt eine Behauptung hinsichtlich aller Funktionen $\mathcal{I}$ auf; das $\Rightarrow$-Zeichen stellt eine Behauptung hinsichtlich aller Interpretationen auf, die zwischen dem Schreiber und dem Leser der Folgerung vereinbart wurden. Stichwort: Pragmatik.

- $\approx$ Semantisches (Formel-)Äquivalenzzeichen. Die rechte Seite folgt aus der linken, und die linke Seite folgt aus der rechten; beide Seiten sind Formeln.

- $\Leftrightarrow$ Semantisches (Aussagen-) Äquivalenzzeichen. Die rechte Seite folgt aus der linken, und die linke Seite folgt aus der rechten; die Seiten müssen Aussagen sein.

- $\leadsto$ Zeichen zum Zusammenfassen von Umformungs- und Auswertungsschritten. Darüberhinaus ist für dieses Zeichen keine spezielle Semantik festgelegt.

Semantik der Aussagenlogik

Zeichen der Metasprache

$\models$ Semantisches (Formel-)Folgerungszeichen. Die rechte Seite folgt aus der linken; beide Seiten sind Formeln.

$\Rightarrow$ Semantisches (Aussagen-)Folgerungszeichen. Die rechte Seite folgt aus der linken; die Seiten müssen Aussagen sein. Zeigt die Richtung einer Valenzeinschränkung.

Beachte, dass der Begriff „Folgerung“ sowohl für die rechte Seite als auch für den gesamten Ausdruck verwendet wird. Eine Folgerung – als gesamter Ausdruck gesehen – macht eine Aussage bzw. stellt eine Behauptung auf hinsichtlich *aller* Interpretationen der rechten und der linken Seite.
D. h., das $\models$-Zeichen stellt eine Behauptung hinsichtlich aller Funktionen $\mathcal{I}$ auf; das $\Rightarrow$-Zeichen stellt eine Behauptung hinsichtlich aller Interpretationen auf, die zwischen dem Schreiber und dem Leser der Folgerung vereinbart wurden. Stichwort: Pragmatik.

$\approx$ Semantisches (Formel-)Äquivalenzzeichen. Die rechte Seite folgt aus der linken, und die linke Seite folgt aus der rechten; beide Seiten sind Formeln.

$\Leftrightarrow$ Semantisches (Aussagen-) Äquivalenzzeichen. Die rechte Seite folgt aus der linken, und die linke Seite folgt aus der rechten; die Seiten müssen Aussagen sein.

$\leadsto$ Zeichen zum Zusammenfassen von Umformungs- und Auswertungsschritten. Darüberhinaus ist für dieses Zeichen keine spezielle Semantik festgelegt.

Bemerkungen:

- Formeln sind wohlgeformte Ausdrücke in der Objektsprache.
- Mit den Zeichen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und den Atomen werden in der Aussagenlogik Formeln konstruiert. Jede Formel hat für eine gegebene Bewertung $\mathcal{I}$ einen Wert, nämlich 0 oder 1.
- Mit den Zeichen $\models$, $\Rightarrow$, $\approx$ und $\Leftrightarrow$ werden Aussagen in der Metasprache aufgestellt. Diese sind keine aussagenlogischen Formeln.
- Von Aussagen (Behauptungen) kann festgestellt werden, ob sie wahr oder falsch sind. Die aufgeführten Zeichen dienen als Abkürzungen zum Aufschreiben dieser speziellen Aussagen.
- Eine Aussage*form* enthält Formelvariablen. Werden für alle Formelvariablen einer Aussageform Werte eingesetzt, so wird aus der Aussageform eine Aussage.

Semantik der Aussagenlogik

Beispiele für Formeln aus Aussagenlogik und Algebra:

- $\alpha \wedge \beta$ hat unter Bewertung $\mathcal{I}$ den Wahrheitswert $\mathcal{I}(\alpha \wedge \beta)$
- $4 + 3$
- $\neg A$
- $\sqrt{7}$
- $\alpha \rightarrow \beta$

Semantik der Aussagenlogik

Beispiele für Formeln aus Aussagenlogik und Algebra:

- $\alpha \land \beta$ hat unter Bewertung $\mathcal{I}$ den Wahrheitswert $\mathcal{I}(\alpha \land \beta)$
- $4 + 3$
- $\neg A$
- $\sqrt{7}$
- $\alpha \rightarrow \beta$

Beispiele für Aussagen:

- „7 ist eine gerade Zahl“ die Aussage ist falsch
- $4 + 3 = \sqrt{7}$ die Aussage ist falsch
- $\alpha \models \beta$ mit α und β als Namen für konkrete Formeln
- „α ist erfüllbar“ mit α und β als Namen für konkrete Formel

Semantik der Aussagenlogik

Beispiele für Formeln aus Aussagenlogik und Algebra:

- $\alpha \wedge \beta$ hat unter Bewertung $\mathcal{I}$ den Wahrheitswert $\mathcal{I}(\alpha \wedge \beta)$
- $4 + 3$
- $\neg A$
- $\sqrt{7}$
- $\alpha \rightarrow \beta$

Beispiele für Aussagen:

- „7 ist eine gerade Zahl“ die Aussage ist falsch
- $4 + 3 = \sqrt{7}$ die Aussage ist falsch
- $\alpha \models \beta$ mit α und β als Namen für konkrete Formeln
- „α ist erfüllbar“ mit α und β als Namen für konkrete Formel

Beispiele für Aussageformen:

- „x ist eine gerade Zahl“ mit x als Formelvariablen
- $\alpha \models \beta$ mit α und β als Formelvariablen

Semantik der Aussagenlogik

Weitere Vereinbarungen zur Syntax:

1. $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ binden stärker als $\models$ und $\approx$

2. $\models$ bindet stärker als $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und $\rightsquigarrow$

3. $\models$ mit Mengenschreibweise: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ bzw. $M \models \beta$.

   Die Formeln einer Menge werden als mit „$\wedge$" verknüpft angesehen.
   $\emptyset \models \beta$ wird abgekürzt geschrieben als $\models \beta$

Bemerkungen:

- Offensichtlich gilt: $\emptyset \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta$ tautologisch
- Begründung: β ist unter allen Interpretationen wahr, unter denen die leere Menge von Formeln wahr ist. Die leere Menge von Formeln ist unter allen möglichen Interpretationen wahr. Also muss β unter allen möglichen Interpretationen wahr sein. Also ist β eine Tautologie.

  Formale Ausführung der Begründung:

  1. Was bedeutet $M \models \beta$?
     $M \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathcal{I} : (\mathcal{I}(M) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}(\beta) = 1)$
  2. Wann ist $\mathcal{I}(M) = 1$?
     $\mathcal{I}(M) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in M : \mathcal{I}(\alpha) = 1$ genauer: $\forall \alpha : (\alpha \in M \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}(\alpha) = 1)$
     $\mathcal{I}(M) = 1$ gilt also genau dann, wenn $\forall \alpha : (\alpha \in M \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}(\alpha) = 1)$ wahr ist.
  3. Mit $M = \emptyset$ lässt sich aus $\alpha \in M$ alles folgern („ex falso sequitur quod libet“), also auch $\mathcal{I}(\alpha) = 1$, unabhängig von $\mathcal{I}$. Also ist $\mathcal{I}(M) = 1$ für jedes $\mathcal{I}$ wahr.
     Damit $\mathcal{I}(M) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}(\beta) = 1$ eine Folgerung bleibt, muss auch $\mathcal{I}(\beta) = 1$ für jedes $\mathcal{I}$ wahr sein. Also ist β tautologisch.

Eigenschaften des Folgerungsbegriffs

Lemma 12 (über aussagenlogische Formeln α und β)

1. $\alpha \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \rightarrow \beta$ tautologisch
2. $\alpha \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta)$ tautologisch
3. $\alpha \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll
4. α widerspruchsvoll $\quad \Leftrightarrow \quad$ Für alle β gilt $\alpha \models \beta$ „Ex falso quod libet.“
5. α widerspruchsvoll $\quad \Leftrightarrow \quad$ Es gibt γ mit $\alpha \models (\gamma \wedge \neg\gamma)$

Eigenschaften des Folgerungsbegriffs

Lemma 13 (Deduktionstheorem)

Seien α, β aussagenlogische Formeln, M eine Menge aussagenlogischer Formeln. Dann gilt:

$$M \cup \{\alpha\} \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad M \models \alpha \rightarrow \beta$$

Bemerkungen:

- Das Deduktionstheorem macht Aussagen über die Folgerbarkeit von Implikationen (Regeln).

$$M \models \underbrace{\alpha \rightarrow \beta}_{\text{Regel}}$$

  Diese Regeln beschreiben für M allgemeingültige Zusammenhänge. M kann als die Modellierung eines Ausschnitts unserer Welt aufgefasst werden: Wenn die Modellierung von M zutrifft (wahr ist, $\mathcal{I}(M) = 1$), so ist auch die Regel $\alpha \rightarrow \beta$ wahr ($\mathcal{I}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$).

- Das Deduktionstheorem zeigt, welche Regeln in Bezug auf ein Modell gültig sind.

- Die Art der Definition von Bewertungen erlaubt sofort auch die Bewertung von (unendlichen) Mengen von Formeln. Die Begriffe „erfüllbar“, „falsifizierbar“, „tautologisch“ und „widerspruchsvoll“ lassen sich dementsprechend auf Formelmengen ausdehnen.

Eigenschaften des Folgerungsbegriffs

Beweis (Deduktionstheorem)

Sei M eine Menge von Formeln und sei $\mathcal{I}$ eine Bewertung mit $\mathcal{I}(M) = 1$.

1. Fall. $\mathcal{I}(\alpha) = 0,\ \mathcal{I}(\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}(M \cup \{\alpha\}) = 0,\ \mathcal{I}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$

2. Fall. $\mathcal{I}(\alpha) = 0,\ \mathcal{I}(\beta) = 1$ analog

3. Fall. $\mathcal{I}(\alpha) = 1,\ \mathcal{I}(\beta) = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \mathcal{I}(M \cup \{\alpha\}) = 1, \\ & \quad \mathcal{I}(\alpha \rightarrow \beta) = 0 \\ &\Rightarrow \quad M \cup \{\alpha\} \not\models \beta, \\ & \quad M \not\models (\alpha \rightarrow \beta) \end{aligned}$$

4. Fall. $\mathcal{I}(\alpha) = 1,\ \mathcal{I}(\beta) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}(M \cup \{\alpha\}) = 1,\ \mathcal{I}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$

Tritt bei Betrachtung aller Bewertungen Fall 3 niemals auf, so gilt:

$$M \cup \{\alpha\} \models \beta \text{ und } M \models (\alpha \rightarrow \beta)$$

Tritt bei einer Bewertung Fall 3 auf: $M \cup \{\alpha\} \not\models \beta$ und $M \not\models (\alpha \rightarrow \beta)$

Also gilt insgesamt: $M \cup \{\alpha\} \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad M \models (\alpha \rightarrow \beta)$

Eigenschaften des Folgerungsbegriffs

Korollar 14 (Deduktionstheorem für endliches M)

Seien α, β aussagenlogische Formeln, M eine endliche Menge aussagenlogischer Formeln. Dann gilt:

$$M \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \models M \rightarrow \beta$$

Lemma 15 (Interpolationstheorem)

Seien α, β aussagenlogische Formeln, und α nicht widerspruchsvoll, β keine Tautologie. Dann gilt:

$\alpha \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad$ Es gibt eine Formel γ mit

atoms$(\gamma) \subseteq$ *atoms*$(\alpha) \cap$ *atoms*(β) und

$\alpha \models \gamma$ und $\gamma \models \beta$.

Bemerkungen:

- Abgesehen von den trivialen Fällen (α widerspruchsvoll oder β tautologisch) sind nur Formelbestandteile, die in Prämisse und Konklusion gemeinsam auftreten, verantworlich für die Gültigkeit der Folgerungsrelation.

- Beispiel:
  $A \wedge B \models B \vee C$
  $\Rightarrow$ Mit Interpolante B gilt $A \wedge B \models B$ und $B \models B \vee C$

Äquivalenz

Problematik:

Experte 1 —— Formalisierung 1 ——> α_1

Experte 2 —— Formalisierung 2 ——> α_2

Es soll gelten (bei Absprache der Bezeichner):

- *atoms*$(\alpha_1) =$ *atoms*(α_2)
- zumindest sei *atoms*$(\alpha_1) \cap$ *atoms*(α_2) „groß“

Jedoch: $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Frage: Wann sind logische Formeln äquivalent?

- Bei Gleichheit der Zeichenketten?
- Bei Gleichheit der Zeichenketten modulo Klammerung / Kommutativität?
- Bei Gleicheit von *atoms*(α_1) und *atoms*(α_2)?
- Bei Rückgabe gleicher Antworten auf gleiche Fragen?
- . . . ?

Äquivalenz

Definition 16 (logische Äquivalenz)

Zwei Formeln α und β heißen logisch äquivalent, $\alpha \approx \beta$, genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(\beta)$$

Hiermit folgt:

(a) $\alpha \approx \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leftrightarrow \beta$ tautologisch

(b) α, β widerspruchsvoll $\quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \beta$

(c) α, β tautologisch $\quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \beta$

(d) $\alpha \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \approx \alpha \wedge \beta$

Äquivalenz

Lemma 17

Sei α eine aussagenlogische Formel, γ eine Teilformel von α und δ eine Formel mit $\gamma \approx \delta$.

Weiterhin sei β_1 das Ergebnis der Ersetzung *eines* Vorkommens von γ in α durch δ. Dann gilt:

$$\alpha \approx \beta_1$$

Spezialfall:

Sei β_* das Ergebnis der Ersetzung *aller* Vorkommen von γ in α durch δ. Dann gilt:

$$\alpha \approx \beta_*$$

Äquivalenz

Wichtige Äquivalenzen zur Formeltransformation/-vereinfachung

Junktoren	$\alpha \to \beta \approx \neg\alpha \vee \beta$
	$\alpha \leftrightarrow \beta \approx (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$
	$\approx (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\beta \wedge \neg\alpha)$
Vererbung	$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha \approx \neg\beta$
	$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma \wedge \alpha \approx \gamma \wedge \beta$
	$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma \vee \alpha \approx \gamma \vee \beta$
	$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma \to \alpha \approx \gamma \to \beta$
	$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \to \gamma \approx \beta \to \gamma$
	$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \leftrightarrow \gamma \approx \beta \leftrightarrow \gamma$
Negation als Involution	$\neg\neg\alpha \approx \alpha$
Idempotenz	$\alpha \vee \alpha \approx \alpha$
	$\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$

Äquivalenz

Wichtige Äquivalenzen zur Formeltransformation/-vereinfachung (Fortsetzung)

Kommutativität	$\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$
	$\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$
	$\alpha \leftrightarrow \beta \approx \beta \leftrightarrow \alpha$
Assoziativität	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
Distributivität	$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \approx (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$
	$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \approx (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$
	$\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$

Äquivalenz

Definition 18 (Erfüllbarkeitsäquivalenz)

Zwei Formeln α und β heißen erfüllbarkeitsäquivalent, $\alpha \approx_{\text{sat}} \beta$, genau dann, wenn gilt:

$$\alpha \text{ erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad \beta \text{ erfüllbar}$$

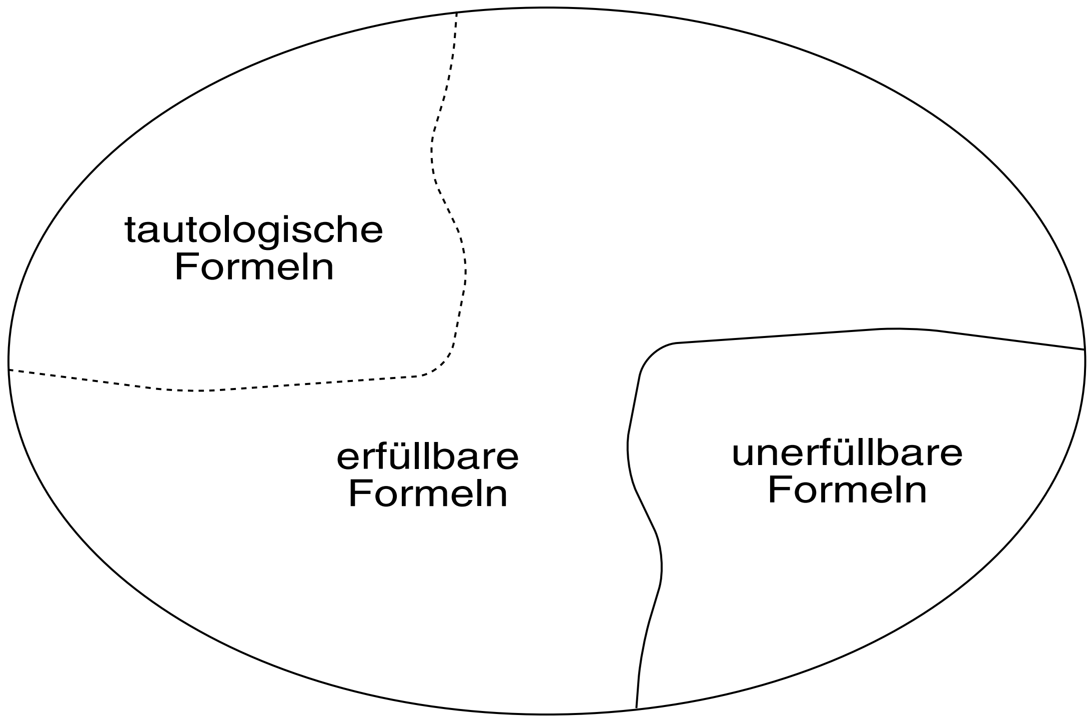
Unterschied zur logischen Äquivalenz:

$$\alpha \approx \beta \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathcal{I} : \quad \mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(\beta)$$

$$\alpha \approx_{\text{sat}} \beta \quad \Leftrightarrow \quad (\exists \mathcal{I} : \mathcal{I}(\alpha) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathcal{I} : \mathcal{I}(\beta) = 1)$$

Äquivalenz

Veranschaulichung der Formeln hinsichtlich ihrer Erfüllbarkeit:



Bemerkungen:

- Für die Erfüllbarkeitsäquivalenz gilt:
  1. $\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx_{\text{sat}} \beta$
  2. α, β widerspruchsvoll $\quad \Rightarrow \quad \alpha \approx_{\text{sat}} \beta$
  3. α, β erfüllbar $\quad \Rightarrow \quad \alpha \approx_{\text{sat}} \beta$

- Es gibt keine „Vererbung“ der Erfüllbarkeitsäquivalenz. D.h., es gibt Formeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit
  1. γ ist Teilformel in α
  2. β_1 ist das Ergebnis der Ersetzung eines Vorkommens von γ in α durch δ.
  3. $\gamma \approx_{\text{sat}} \delta$ aber $\alpha \not\approx_{\text{sat}} \beta_1$

- Beispiel:

  $\alpha = A \land \neg B, \quad \gamma = A, \quad \delta = B$

  $\rightsquigarrow \beta_1 = B \land \neg B$

  $A \approx_{\text{sat}} B$ aber $A \land \neg B \not\approx_{\text{sat}} B \land \neg B$