Kapitel L:III

III. Prädikatenlogik

- ❑ Syntax der Prädikatenlogik
- ❑ Semantik der Prädikatenlogik
- ❑ Wichtige Äquivalenzen
- ❑ Einfache Normalformen
- ❑ Substitution
- ❑ Skolem-Normalformen
- ❑ Standard-Erfüllbarkeit
- ❑ Prädikatenlogische Resolution
- ❑ Grenzen der Prädikatenlogik

Grenzen der Prädikatenlogik

Dadurch, dass wir bisher keine Möglichkeit vorgesehen haben, in den Formeln die Identität zweier Objekte zu formulieren, gibt es zu jeder Formel, die über einem endlichen Bereich erfüllt werden kann, auch eine erfüllende Interpretation über einem unendlichen Bereich.

Wir nehmen daher für die Aussage des nächsten Satzes noch zusätzlich ein zweistelliges Prädikat "$=$" zu den Prädikatssymbolen hinzu, das wir aufgrund der leichteren Lesbarkeit in Infix-Notation verwenden:

$$t_1 = t_2.$$

Interpretationen müssen dieses Prädikat "$=$" so interpretieren, dass es die Gleichheit über dem Grundbereich der Interpretation ist. Bei einer Interpretation mit Grundbereich $\mathbf{N}$ ist "$=$" also die übliche Gleichheit zwischen natürlichen Zahlen, die nur zutrifft, wenn es sich um die gleiche Zahl handelt. Für eine Herbrand-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt $\mathcal{I}(t_1 = t_2) = 1$ genau dann, wenn es sich bei $\mathcal{I}(t_1)$ und $\mathcal{I}(t_2)$ um dieselbe Zeichenkette handelt.

Bemerkungen:

- Oft wird in der Literatur das “=”-Symbol für das Gleichheitsprädikat vereinbart.

  Im Gegensatz zu den anderen Prädikatssymbolen wie P, Q, R ist die Interpretation von “=” schon festgelegt: $\mathcal{I}(=)$ ist das Gleichheitsprädikat über dem Grundbereich $\mathcal{U}$ der Interpretation $\mathcal{I}$; es ist zweistellig und es ist wahr, wenn sich die Interpretationen der Argumente nicht unterscheiden.
- Das Gleichheitsprädikat lässt sich auch mit den Mitteln der Prädikatenlogik einführen, indem für ein beliebiges Prädikatssymbol Formeln definiert werden, die wie für die Gleichheit die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation und die Verträglichkeit mit Funktionen und Prädikaten zu axiomatisieren.

Grenzen der Prädikatenlogik

Durch die Gleichheit hat man nun die Möglichkeit, bestimmte Anzahlen von Elementen in Grundbereichen erfüllender Interpretationen zu fordern.

Zwar konnten wir bisher schon durch einstellige Prädikate ausdrücken, dass eine Mindestanzahl von Objekten existieren muss, beispielsweise setzt

$$P(a) \land \neg P(b) \land \neg P(c) \land Q(b) \land \neg Q(c)$$

mindestens drei Elemente im Grundbereich einer erfüllenden Interpretation voraus, aber wir hatten keine Möglichkeit zur Angabe von oberen Schranken.

Grenzen der Prädikatenlogik

Die Formel

$$\beta_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$$

hat nur erfüllende Interpretationen mit Grundbereichen mit mehr als n Elementen.

Die Formel

$$\gamma_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} y = x_i \right)$$

hat nur erfüllende Interpretationen mit Grundbereichen mit höchstens n Elementen.

Grenzen der Prädikatenlogik

Satz 25

Endlichkeit ist nicht axiomatisierbar,
d.h. es gibt keine Formelmenge M, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:
$\mathcal{I}$ erfüllt M genau dann, wenn $\mathcal{I}$ einen endlichen Grundbereich hat.

Beweis (Skizze)

Der Beweis des Satzes wird indirekt geführt.

Man nimmt an, dass eine Formelmenge M mit der Eigenschaft des Satzes existiert. Diese Formelmenge kann man um die Formelmenge $\{\beta_n \mid n \geq 2\}$ erweitern. Die so entstandene Formelmenge M' ist nach dem Endlichkeitssatz erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge M'_e erfüllbar ist. Jede endliche Teilmenge M'_e der Formelmenge enthält aber nur endlich viele β_n. Der maximale Index der β_n sei k. Also gilt $M'_e \subset M \cup \{\beta_2, \ldots, \beta_k\}$ und letztere Menge wird erfüllt von jeder Interpretation mit einem Grundbereich von mindestens k Elementen. Da aber für $\{\beta_n \mid n \geq 2\}$ eine erfüllende Interpretation einen unendlichen Grundbereich haben muss, erhält man einen Widerspruch.