Kapitel L:IV

IV. Nichtklassische Logiken

- Fuzzy-Mengen
- Modifizierer für Fuzzy-Mengen
- Operationen auf Fuzzy-Mengen
- Fuzzy-Inferenz
- Defuzzifizierung

Fuzzy-Inferenz

Aussagenlogik versus Fuzzy-Logik

Aussagenlogische Regel: $a \rightarrow b$

- Definiert einen Bezug zwischen zwei Aussagen.
- Aussagen stehen für Wahrheitswerte, d.h. klassische Mengen.

Fuzzy-Regel: $A \rightarrow B$

- Definiert einen Bezug zwischen zwei Aussagen.
- Aussagen stehen für *Fuzzy-Mengen*.

Syntax: kein Unterschied zwischen klassischer Logik und Fuzzy-Logik.

Semantik in der Fuzzy-Logik:

- Information über die Prämisse ist unscharf.
- Beziehung zwischen Prämisse und Konklusion ist unscharf.

Welche Information resultiert für die Konklusion?

Bemerkungen:

- Für die Definition der unscharfen Implikation gibt es verschiedene Ansätze, die die logische Repräsentation der Implikation bzw. ihre semantischen Eigenschaften in die Fuzzy-Logik übertragen:
  - S-Implikation:
    $a \to b \approx \neg a \vee b$ und $I(A, B) = S(C(A), B)$
  - QL-Implikation:
    $a \to b \approx \neg a \vee (a \wedge b)$ und $I(A, B) = S(C(A), T(A, B))$
  - R-Implikationen $\Im(a \to b) = \max\{z \in \{0, 1\} \mid \min(\Im(x), z) \leq \Im(y)\}$ und $I(A, B) = \sup\{z \in [0, 1] \mid T(A, z) \leq B\}$
- Mit der Auswahl von C-dualen T-Normen T und T-Conormen S ergeben sich eine Vielzahl von unscharfen Implikationsdefinitionen.
- Wichtig ist, dass alle drei Definitionen extensional sind in dem Sinne, dass die Ergebnisse nicht von den konkreten (scharfen) Werten der Grundbereiche der Fuzzy-Mengen abhängig sind, sondern nur von den Werten für μ_A und μ_B.

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens

Seien A', A Fuzzy-Mengen über X und B', B Fuzzy-Mengen über Y. Dann beschreibt der generalisierte Modus Ponens (GMP) folgenden Zusammenhang:

$$A' \texttt{ AND } (\texttt{IF } A \texttt{ THEN } B) \mid_{\overline{Fuzzy}} B'$$

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens

Seien A', A Fuzzy-Mengen über X und B', B Fuzzy-Mengen über Y. Dann beschreibt der generalisierte Modus Ponens (GMP) folgenden Zusammenhang:

$$A' \texttt{ AND } (\texttt{IF } A \texttt{ THEN } B) \underset{Fuzzy}{\models} B'$$

Idee: eine Regel bestimmt einen funktionalen Operator, der die Fuzzy-Menge A' (d.h. $\mu_{A'}$) auf die Fuzzy-Menge B' (d.h. $\mu_{B'}$) abbildet. Eine Regel wird hier als Relation über $X \times Y$ aufgefasst:

$$B' = A' \circ R,$$

wobei R die Fuzzy-Relation für die Regel bezeichnet. Zugehörigkeitsfunktionen für Relationen werden über den Minimum-Operator bestimmt.

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens (Fortsetzung)

Problematik im diskreten Fall.

Es gilt $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, und sei $A' = \{a'_2, a'_3\} \subseteq A$, z.B. $\{0.7/180cm, 0.8/190cm\}$, und sei $B' = \{b'_2, b'_3\} \subseteq B$, z.B. $\{0.6/70kg, 0.8/80kg\}$.

1. Welcher Zusammenhang gilt zwischen A' und B'?

$$a'_i \rightsquigarrow b'_j, \quad i, j \in \{2, 3\}$$

2. Welcher Zusammenhang gilt zwischen A und B?

$$a_i \rightsquigarrow b_j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

3. In welcher Stärke gilt ein Zusammenhang?

$$\textit{grad}(a_i \rightsquigarrow b_j)$$

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens (Fortsetzung)

Beispiel:

- height = $\{$small, medium, tall$\}$
- weight = $\{$low, medium, heavy$\}$
- height_is_tall $= \{a_1, a_2, a_3\} = \{0.6/170cm, 0.8/180cm, 0.9/190cm\}$
- weight_is_heavy $= \{b_1, b_2, b_3\} = \{0.5/60kg, 0.7/70kg, 0.9/80kg\}$
- IF height_is_tall THEN weight_is_heavy

Fragen:

- Ist mit der Regel aus height_is_very_tall auch weight_is_very_heavy herleitbar?
- Ist mit der Regel auch aus height_is_small etwas herleitbar?

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens (Fortsetzung)

Definition 5 (Compositional Rule of Inference, CRI [Zadeh 1973])

Für eine Regel „$\texttt{IF}\ \ A\ \ \texttt{THEN}\ \ B$“ mit Fuzzy-Mengen A, A' über X und B über Y wird die Fuzzy Menge B' über Y definiert durch:

$$\mu_{B'}(y) := \sup\{\text{min}(\mu_{A'}(x), \text{min}(\mu_A(x), \mu_B(y))) \mid x \in X\} \quad \text{für } y \in Y$$

Lokale Korrektheit:

Im Falle $A' = A$ ergibt sich $B' = B$. Die lokale Korrektheit ist gegeben, falls z.B. $\sup\{\mu_A(x) \mid x \in X\} = 1$

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz [Mamdani 1977]

Im diskreten Fall lässt sich die Fuzzy-Relation für die Regel R: $\texttt{IF}$ A $\texttt{THEN}$ B durch eine Matrix beschreiben:

- Aufstellung der Menge aller Paare für zwei Fuzzy-Mengen $A = (\mu_A(x_1), ...)$ und $B = (\mu_B(y_1), ...)$ über diskreten Grundbereichen X bzw. Y:

$$M_R = \begin{pmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \ldots \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \ldots \\ \ldots & & \end{pmatrix}$$

- $\mu_R(x_i, y_j)$ ist der Grad, mit dem x_i und y_j über die Regel in Beziehung stehen.

- Mit Darstellung von A' als Vektor und Regel R als Matrix ergibt sich B' durch „Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation“.

- Statt des Supremum kann in der Definition CRI der Maximum Operator gewählt werden.

Fuzzy-Inferenz

Vektor-Matrix-Multiplikation

In der Algebra:

$$\underset{1\times n}{x} \cdot \underset{n\times p}{A} = \underset{1\times p}{y} \quad \text{also} \quad y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$$

Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation $\circ$:

- paarweise Multiplikation führt zu paarweiser Minimum-Bildung
- Summation führt zu Maximum-Bildung

Fuzzy-Inferenz

Vektor-Matrix-Multiplikation

In der Algebra:

$$\underset{1\times n}{x} \cdot \underset{n\times p}{A} = \underset{1\times p}{y} \quad \text{also} \quad y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$$

Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation $\circ$:

- paarweise Multiplikation führt zu paarweiser Minimum-Bildung
- Summation führt zu Maximum-Bildung

Für eine Regel `IF` A `THEN` B:

- A, A' und B sind auf X bzw. Y definierte Fuzzy-Mengen
- $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n); \quad a_i = \mu_A(x_i)$
  $A' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n); \quad a'_i = \mu_{A'}(x_i)$
  $B = (b_1, b_2, \ldots, b_p); \quad b_i = \mu_B(y_i)$
- $1 \times p$-Matrix: $A' \circ M_R = B'$, mit $b'_j = \max\{\min(a'_i, \min(a_i, b_j)) \mid 1 \leq i \leq n\}$

Fuzzy-Inferenz

Vektor-Matrix-Multiplikation

Beispiel:

Sei $A' = (0.2, 0.4, 0.6, 1)$ und

$$M_R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 0.6 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b'_1 &= \text{max}\{\text{min}\{0.2, 0.1\}, \text{min}\{0.4, 0.6\}, \text{min}\{0.6, 0.8\}, \text{min}\{1, 0\}\} \\ &= \text{max}\{0.1, 0.4, 0.6, 0\} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b'_2 &= \text{max}\{0.2, 0.4, 0.6, 0.5\} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b'_3 &= \text{max}\{0.2, 0.4, 0.5, 0.5\} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

Als Implikations-Operator wird min verwendet:

$$m_{ij} = \text{grad}(a_i \rightarrow b_j) = \text{min}(a_i, b_j)$$

Sind die Fuzzy-Mengen A, B und A' über diskreten Grundbereichen gegeben, so kann der durch A' induzierte Vektor B' durch die Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation ermittelt werden:

$$B' = A' \circ M$$

$$b'_j = \text{max}\{\text{min}(a'_i, m_{ij}) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

Beispiel:

- A = `normal_temperature` ist Fuzzy-Menge auf Grundbereich X.
- B = `medium_velocity` ist Fuzzy-Menge auf Grundbereich Y.
- $\underbrace{\texttt{IF temperature is normal}}_{\texttt{IF } A} \quad \underbrace{\texttt{THEN velocity is medium}}_{\texttt{THEN } B}$
- $A = \texttt{normal\_temperature} = (0/100, 0.5/125, 1/150, 0.5/175, 0/200)$
- $B = \texttt{medium\_velocity} = (0/10, 0.6/20, 1/30, 0.6/40, 0/50)$

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

Beispiel (Fortsetzung):

$$M = (m_{ij}) = (\text{min}\{a_i, b_j\}) = \begin{pmatrix} \text{min}\{0,0\} & \text{min}\{0,0.6\} & \text{min}\{0,1\} & \text{min}\{0,0.6\} & \text{min}\{0,0\} \\ \text{min}\{0.5,0\} & \text{min}\{0.5,0.6\} & \text{min}\{0.5,1\} & \text{min}\{0.5,0.6\} & \text{min}\{0.5,0\} \\ \text{min}\{1,0\} & \dots & & & \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weiterhin sei $A' = (0/100, 1.0/125, 0/150, 0/175, 0/200)$.

A' repräsentiert einen scharfen Temperaturwert von 125 Grad mit Zugehörigkeitswert 0.5 zur Fuzzy-Menge `normal_temperature`.

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

Beispiel (Fortsetzung):

Durch Vektor-Matrix-Multiplikation ergibt sich $B' = A' \circ M$ mit

$$b'_j = \max_{1 \leq i \leq n} \{\min\{a'_i, m_{ij}\}\}$$

Man erhält:

$b'_1 = \max\{\min\{0, 0\}, \min\{1.0, 0\}, \min\{0, 0\}, \min\{0, 0\}, \min\{0, 0\}\}$

$b'_2 = \ldots$

$\ldots$

$B' = (0/10, 0.5/20, 0.5/30, 0.5/40, 0/50)$

Vektor-Matrix-Multiplikation führt das Gewünschte aus:

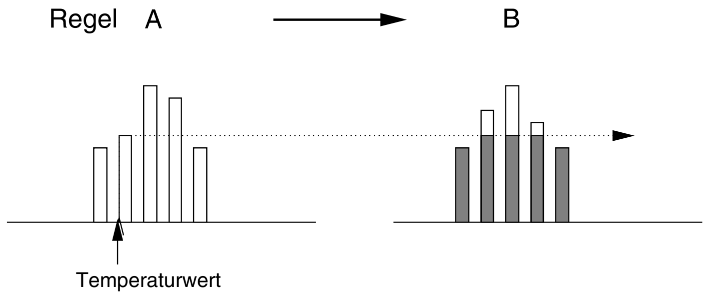
- Konstruktion von B' auf Basis von A' und $A \rightarrow B$
- Konstruktion von $B' \subseteq B$ auf Basis von $A' \subseteq A$ und $A \rightarrow B$

Fuzzy-Inferenz

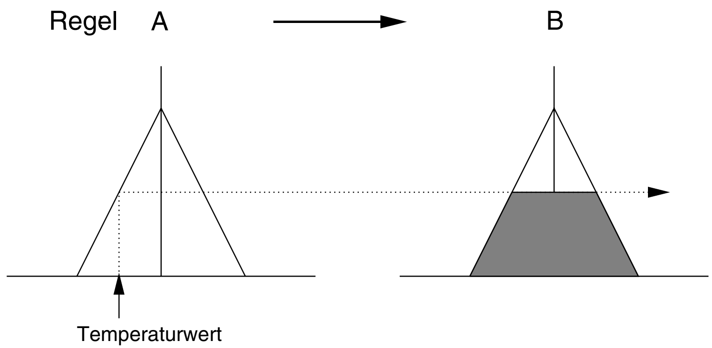
Max-Min-Inferenz

Spezialfall: A' gegeben durch scharfen (Mess-)Wert aus Grundbereich X. Die induzierte Fuzzy-Menge B' ist eine abgeschnittene Kopie von B, dessen Höhe durch A' definiert ist.

Diskrete Situation:



Kontinuierliche Situation:



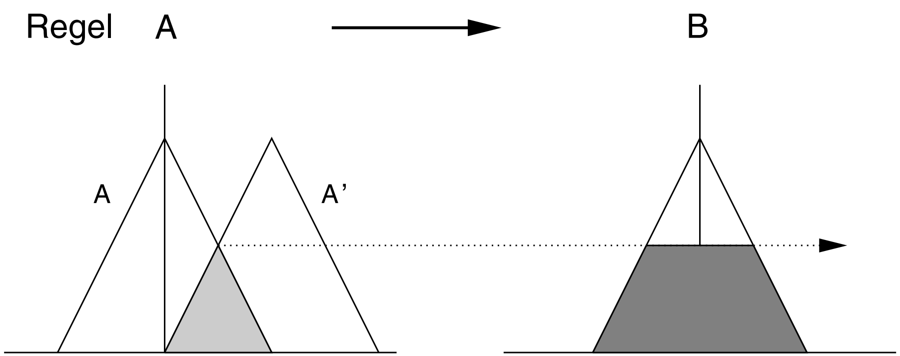
Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

$$A' \wedge (A \rightarrow B) \mid_{\overline{Fuzzy}} B' \qquad \equiv \qquad A' \circ M = B' = (0, 0.5, 0.5, 0.5, 0)$$

Ist der Input A' für die Regel `IF` A `THEN` B in unscharfer Form gegeben, so wird durch die Max-Min-Inferenz

1. das Faktum A' durch „Durchschnittsbildung“ (Minimum bzw. Konjunktion) mit der Prämisse A der Regel verrechnet,
2. das Supremum ein einzelner Wert ermittelt und
3. zum „Abschneiden“ der Zugehörigkeitsfunktion von B in der Regel verwendet:



Bemerkungen:

- Das Abschneiden zur Bildung der induzierten Fuzzy-Menge ist charakteristisch für die Max-Min-Inferenz.
- $A' = (0, 1.0, 0, 0, 0)$ resultiert aus dem scharfen Wert 125.
- Besteht A' aus einem scharfen (einzelnen) Wert x_k, kann direkt die Fuzzy-Mengen-Repräsentation von B, $\mu_B(y)$, benutzt werden, um B' auszurechnen:

  $$B' = (\min(\mu_A(x_k), \mu_B(y_1))/y_1, ...)$$

  $\mu_A(125) = 0.5$
  $B' = (\min\{0.5, 0\}, \min\{0.5, 0.6\}, \ldots) = (0, 0.5, 0.5, 0.5, 0)$

Fuzzy-Inferenz

Max-Produkt-Inferenz

Anstelle der t-Norm $\min(x, y)$ für die Konjunktion kann auch das algebraische Produkt $x \cdot y$ verwendet werden.

- Als Implikations-Operator wird wieder die Konjunktion verwendet, also ebenfalls das Produkt:

  $$m_{ij} = \text{grad}(a_i \rightarrow b_j) = a_i \cdot b_j$$

  im Fall diskreter Grundbereiche.

- Sind die Fuzzy-Mengen A, B und A' über diskreten Grundbereichen gegeben, so kann der durch A' induzierte Vektor B' durch die Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation ermittelt werden:

  $$B' = A' \circ M$$

  $$b'_j = \max\{a'_i \cdot m_{ij} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Fuzzy-Inferenz

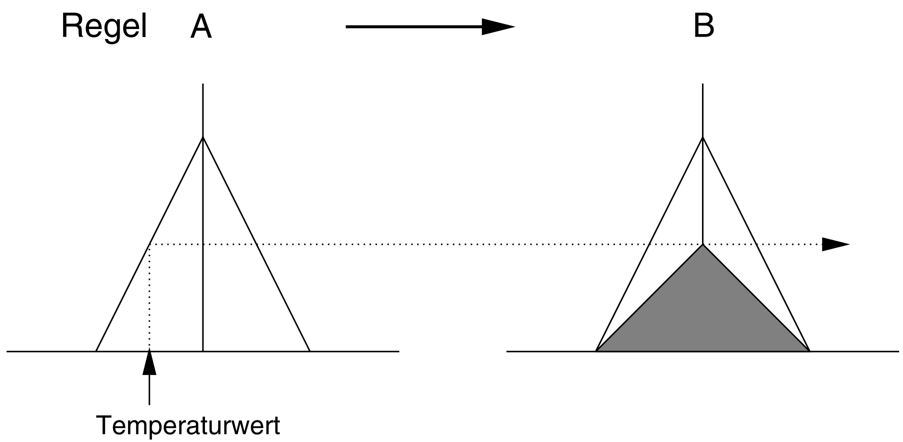
Max-Produkt-Inferenz

Beispiel:

$A = (0, 0.5, 1, 0.5, 0)$
$B = (0, 0.6, 1, 0.6, 0)$

$$M = (m_{ij}) = (a_i \cdot b_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für einen scharfen Wert $A' = (0, 1.0, 0, 0, 0)$ ergibt die Vektor-Matrix-Multiplikation $\circ$ die Fuzzy-Menge $B' = (0, 0.3, 0.5, 0.3, 0)$. B' ist eine verkleinerte Version von B.



Bemerkungen:

- Max-Produkt-Inferenz erhält mehr Information als Max-Min-Inferenz.
- Besteht A' aus einem scharfen (einzelnen) Wert x_k, kann direkt die Fuzzy-Mengen-Repräsentation von B, $\mu_B(y)$, benutzt werden, um B' auszurechnen:

  $$B' = (\mu_A(x_k) \cdot \mu_B(y_1))/y_1, ...)$$

  $\mu_A(125) = 0.5$
  $B' = 0.5 \cdot (0, 0.6, 1, 0.6, 0) = (0, 0.3, 0.5, 0.3, 0)$
- Für die Zusammenfassung von komplexen Prämissen in Regeln muss nicht unbedingt das dazu passende duale Paar von T-Norm und T-Conorm für Konjunktion und Disjunktion, also $T(x, y) = x \cdot y$, $S(x, y) = x + y - x \cdot y$ gewählt werden. Auch die min und max sind möglich.

Fuzzy-Inferenz

Regeln mit mehreren Prämissen

Sei R: $\texttt{IF}\ A\ \texttt{AND}\ B\ \texttt{THEN}\ C$ eine Fuzzy-Regel und die Fuzzy-Mengen A, B und C auf den Grundbereichen X, Y und Z definiert.

Vorgehensweise:

1. Definition von zwei Verknüpfungsmatrizen M_{AC} und M_{BC}.

2. Gegeben sei A' als konkreter Input für A und B' für B, dann können zwei induzierte Fuzzy-Mengen $C_{A'}$ und $C_{B'}$ unabhängig voneinander berechnet werden:

$$A' \circ M_{AC} = C_{A'}$$
$$B' \circ M_{BC} = C_{B'}$$

3. Die Verknüpfung in der Regel $\texttt{R}$ definiert die Verknüpfung der Fuzzy-Mengen $C_{A'}$ und $C_{B'}$. Bei $\texttt{AND}$-Verknüpfung:

$$C' = (A' \circ M_{AC}) \wedge (B' \circ M_{BC}) = C_{A'} \wedge C_{B'}$$

Fuzzy-Inferenz

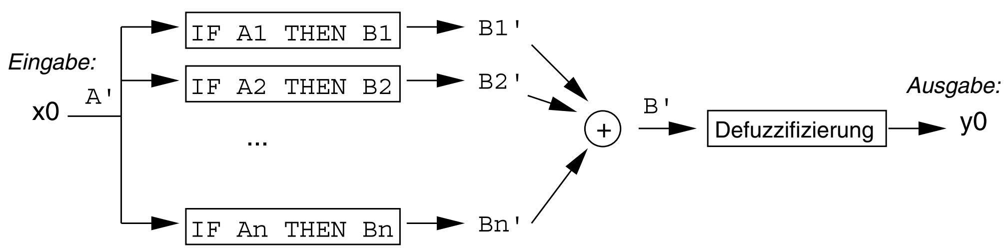
Multiple Regeln

Beispiel:

Gegeben sind n Fuzzy-Regeln mit den Fuzzy-Mengen A_i über dem Grundbereich X und B_i über Y in den Prämissen bzw. Konklusionen. Sei A' über X die Fuzzy-Menge einer scharfen Eingabe – resultierend z. B. aus einer Messung.

1. Jede Fuzzy-Inferenz mit Regel R_i induzierte eine Fuzzy-Menge B'_i.
2. Die Resultate der Regeln werden in B' zusammengefasst:

$$\begin{aligned} B' &= B'_1 \cup B'_2 \cup \ldots \cup B'_n \\ &= \int_X \text{max}(\mu_{B_1}(x), \mu_{B_2}(x), \ldots, \mu_{B_n}(x))/x \end{aligned}$$



Gibt es sinnvollere Methoden zur Zusammenfassung?

Bemerkungen:

- Grundsätzlich kann nicht vorausgesetzt werden, dass alle Regeln nach derselben Inferenzmethode ausgewertet werden.
- Wir betrachten hier nur den Ansatz, mit einzelnen Regeln zu inferieren und die Ergebnisse zusammenzufügen. Stichwort: lokale Inferenz
- Alternativ kann man auch die gesamte Regelmenge zu einer „Super-Relation“ zusammenfügen und dann mit dem Input inferieren. Stichwort: globale Inferenz

Fuzzy-Inferenz

Multiple Regeln

Zusammenfassung der Ergebnismengen einzelner Regeln:

- „Winner takes it all.“
  Vereinigung der induzierten Fuzzy-Mengen [Mamdani]

- „One man, one vote.“
  Punktweise beschränkte Summe der Zugehörigkeitswerte

- Regeln können ihrer Bedeutung entsprechend gewichtet werden. Die Gewichtung wird bei der Zusammenfassung berücksichtigt.

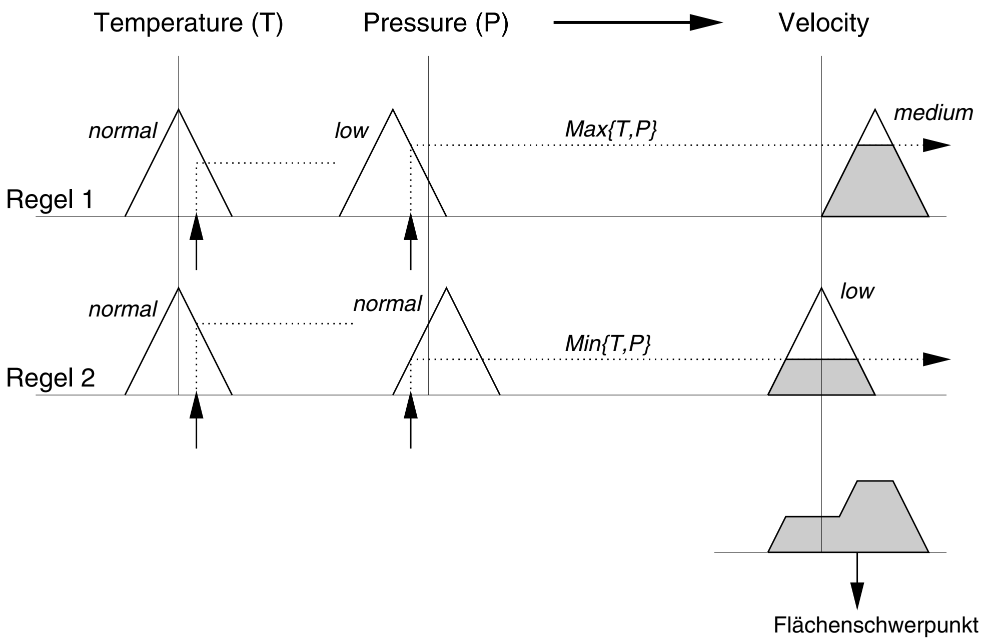
Fuzzy-Inferenz

Multiple Regeln

Beispiel:

```
R1: IF   temperature is normal OR pressure is low
    THEN velocity is medium

R2: IF   temperature is normal AND pressure is normal
    THEN velocity is low
```



Inferenz-Operator ist Max-Min-Inferenz.

Defuzzifizierung

Defuzzifizierung ist die Generierung scharfer Werte einer induzierten Fuzzy-Menge B', Grundbereich Y.

Möglichkeiten:

1. Max-Methode:
   Wähle das (erste) $y_0 \in Y$ als scharfen Wert, für das $\mu_{B'}(y_0)$ maximal ist.

2. Mittelwert-Max-Methode:
   Wähle als scharfen Wert das arithmetische Mittel der Werte $y \in Y$, für die $\mu_{B'}(y)$ maximal ist.

3. Flächenschwerpunkt-Methode:
   Wähle das $y_0 \in Y$ als scharfen Wert, das sich durch eine Projektion des Flächenschwerpunktes der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{B'}$ ergibt:

$$y_0 = \frac{\displaystyle\int_Y y \cdot \mu_{B'}(y)dy}{\displaystyle\int_Y \mu_{B'}(y)dy}$$

Bemerkungen:

- Defuzzifizierung spielt eine wichtige Rolle, wenn mehrere Regeln die gleiche linguistische Variable betreffen.
- Die Flächenschwerpunktmethode (COG Center of Gravity) wird mit der Vereinigung zur Aggrgierung der Ergebnisse mehrerer Regeln kombiniert.

